Uniwersytet Jagielloński
Wydział Filozoficzny
Instytut Filozofii

Marcin Łazarz

Kraty Sytuacji Elementarnych

rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem
prof. dra hab. Jana Woleńskiego
Zakład Epistemologii

Kraków 2007

Spis treści

Wprowadzenie

Problematyka zawarta w niniejszej pracy mieści się w paradygmacie nakreślonym przez Bogusława Wolniewicza w jego licznych pracach poświęconych ontologii sytuacji, przede wszystkim w [25] i [24]. Centralnym pojęciem badanym tutaj jest pojęcie sytuacji elementarnej, przy czym sytuacja elementarna jest to dla nas dowolny element *kraty sytuacji elementarnych*. Taki punkt widzenia wymusił, iż treści tej pracy sformalizowane zostały w języku teorii krat. Posługujemy się ponadto językiem algebry uniwersalnej, teorii mnogości i logiki formalnej.

Niniejsze wprowadzenie przedstawia filozoficzne źródła problemów związanych z pojęciem sytuacji.

Rozdział 1 zawiera pojęcia i twierdzenia algebraiczno-logiczne wykorzystywane we właściwej części pracy.

W rozdziale 2 przedstawiono teorię $\mathbb{BW}$-krat zbudowaną przez Wolniewicza: podano aksjomatykę oraz ważniejsze własności $\mathbb{BW}$-krat, z głównym naciskiem na ich algebraiczną charakteryzację (sekcje 2.3, 2.4). Wykazano min., że każda $\mathbb{BW}$-krata związana jest jednoznacznie z pewną n-ką liczb kardynalnych, co umożliwiło zhierarchizowanie klasy $\mathbb{BW}$-krat. Niemal wszystkie twierdzenia z tych sekcji pochodzą z prac [25], [24] lub są ich konsekwencjami. W sekcjach 2.2 i 2.5 omówiliśmy związki jakie zachodzą między aksjomatami definiującymi $\mathbb{BW}$-kraty.

Rozdział 3 poświęcony jest pewnym kratom słabszym, które nazwaliśmy

$\mathbb{T}$-kratami, a które pozostają w związku z $\mathbb{BW}$-kratami za sprawą operacji $BW(\cdot)$, która generuje różne klasy krat w zależności od tego, do jakiej dziedziny jest aplikowana.

W rozdziale 4, na gruncie krat sytuacji elementarnych, wprowadzono semantyczną relację weryfikowania zdania przez sytuację elementarną. Najpierw zbadano jej podstawowe własności (sekcja 4.1) i porównano z forsingiem intuicjonistycznym (sekcja 4.2). W sekcji 4.3 sformułowano ontologiczny warunek równoważny regule *modus ponens* oraz wykazano, że każda tautologia KRZ jest weryfikowana przez element najmniejszy w dowolnej kracie rozdzielonej. W sekcji kolejnej porównano dwa rodzaje tautologii kratowych, zaś w sekcji 4.5 omówiono ważne dla ontologii sytuacji pojęcia miejsca logicznego i obiektywu oraz wykazano, że obiektywy zdań formują algebrę Boole'a.

W ostatnim rozdziale 5 dowodzimy w kilku wariantach twierdzenia o pełności KRZ względem krat sytuacji elementarnych.

0.1 Rzeczy i fakty

W najszerszym ujęciu ontologia sytuacji jest pewną refleksją filozoficzną, która – jak sugeruje jej nazwa – traktuje pojęcie sytuacji jako centralne. W historii filozofii słowo "sytuacja" padało często i to od samego początku; padało tam gdzie była mowa o faktach, o bycie, o tym jak się rzeczy mają. Istnieją dwie główne intuicje związane z rozumieniem czym jest sytuacja. Po pierwsze, sytuacja to największy fragment świata opisywany przez jakieś zdanie. Z drugiej strony, sytuacja to najmniejszy fragment świata, który "sprawia", że pewne zdanie jest prawdziwe, tzn. przysługuje mu wartość logiczna bycia prawdziwym. Pierwsze rozumienie wiąże się z przekonaniem, że zdania o czymś mówią, coś opisują, do czegoś się odnoszą; drugie, że zdanie jest bądź prawdziwe, bądź fałszywe, *tertium non datur*.

Już Platon w *Sofiście* zauważył następujący "drobiazg" ([18], 262E-263B):

> *Gość*: A jeszcze taki drobiazg.
>
> *Teajtet*: Jaki?
>
> *Gość*: Zdanie, jeżeli już jest, to musi czegoś dotyczyć, a nie może dotyczyć niczego.
>
> *Teajtet*: Tak.
>
> *Gość*: Nieprawdaż? I musi mieć pewną jakość?

Teajtet: Jakżeby nie?

Gość: Więc uważajmy jeden na drugiego.

Teajtet: No, trzeba.

Gość: Więc ja ci powiem zdanie, zestawię rzecz z czynnością za pomocą rzeczownika i czasownika. A czego by to zdanie dotyczyło to ty mi powiedz.

Teajtet: Będzie tak, ile możności.

Gość: Teajtet siedzi. Chyba to niedługie zdanie?

Teajtet: Nie. Takie w sam raz.

Gość: Więc twoja rzecz powiedzieć, o czym ono jest i czego dotyczy.

Teajtet: Jasna rzecz, że o mnie i mnie dotyczy

Gość: A co będzie z takim zdaniem?

Teajtet: Z jakim?

Gość: Teajtet, z którym ja teraz rozmawiam, lata.

Teajtet: I o tym zdaniu nikt nie może powiedzieć inaczej, jak tylko to, że ono dotyczy mnie i mówi o mnie.

Gość: A mówimy, że każde zdanie musi mieć pewną jakość.

Teajtet: Tak.

Gość: A z tych dwóch zdań jaką każdemu trzeba przyznać jakość?

Teajtet: Jedno z nich chyba fałszywe, a drugie prawdziwe.

Gość: To prawdziwe z nich mówi o tobie coś tak, jak jest.

Teajtet: No tak.

Gość: A to fałszywe mówi coś innego, niż jest.

Teajtet: Tak.

Z zacytowanego fragmentu nie można wyciągać zbyt dalekich wniosków: co prawda wg Platona zdanie "Teajtet lata" czegoś dotyczy, ale wydaje się bardziej prawdopodobne, że tym czymś jest *sam Teajtet*, nie zaś sytuacja, *że Teajtet lata*.

W tej materii podobne poglądy wydaje się mieć również Arystoteles. W słynnej definicji prawdy przyznał Arystoteles zdaniu dwie jakości: prawdziwość bądź fałszywość, natomiast w kwestii denotacji zdania nie sposób odnaleźć klarownych tez. Oczywiście komponenty zdań – nazwy – odnoszą się do rzeczy. Metafizycznym fundamentem tej relacji jest Arystotelesowska teoria substancji, czyli istoty rzeczy:

> Substancją nazywamy zarówno ciała proste, jak ziemia, woda, ogień i wszelkie ich odmiany, jak i w ogóle wszelkie ciała i rzeczy z nich złożone, zwierzęta i dajmony i części ich ciał. To wszystko nazywa się substancją nie ze względu na to, że czemuś przysługuje, ale że wszystko inne ze względu na nie [jest nazywane]. ([2], 1017^b 10-15)

Rzeczy mają swoje istoty, a więc wszystkie krzesła łączy jedna cecha: krzesłowatość. Nazwa ogólna "krzesło" denotuje zatem zbiór tych i tylko tych obiektów, które są krzesłowate, natomiast zdanie "Krzesło stoi w pokoju" nie opisuje żadnego fragmentu świata, a jedynie stwierdza, że pewnemu krzesłu (supozycja materialna) przysługuje pewna cecha. Dodajmy, że te poglądy ontologiczne znalazły ścisły wyraz w Arystotelesowskiej sylogistyce.

W wiekach średnich w cieniu sporu o uniwersalia, toczyły się również dyskusje na temat znaczenia zdań. Nie wnikając w subtelne argumentacje, poprzestańmy na wyliczeniu trzech najbardziej klarownych stanowisk (por. [24], s. 229-235):

(A) *Subiektywizm* (Wilhelm Ockham). Wedle tej koncepcji znaczeniem zdania jest korespondująca z nim myśl, pojęta jako wytwór umysłu. Co więcej, zdanie posiada swoje odniesienie i jest nim ten sam stan umysłu, który towarzyszy poczuciu rozumienia zdania. Podkreślić należy, że stanowisko to, każdemu zdaniu przypisuje znaczenie oraz odniesienie przedmiotowe, w szczególności zdaniom fałszywym i negatywnym (np. "Pegaz nie istnieje").

(B) *Reizm* (Piotr z Ailly). W świetle reizmu znaczenie zdania redukowalne jest do jego znaczących komponentów, a tymi są jedynie nazwy (indywidualne i ogólne). Nazwy mają też oczywiście swoje odniesienie przedmiotowe – są nimi rzeczy lub zbiory rzeczy. Odniesieniem zdania jest natomiast nic innego, jak zbiór rzeczy denotowanych przez nazwy występujące w tym zdaniu. W konsekwencji reiści odmówili odniesienia przedmiotowego zdaniom fałszywym i negatywnym.

(C) *Faktualizm* (Grzegorz z Rimini). Według tego stanowiska odniesieniem przedmiotowym zdań nie są stany umysłu ani rzeczy, lecz *sposób w jaki rzeczy istnieją* (*non res, sed modus rei*). Tak np. odniesieniem zdania "Sokrates biega" jest sposób w jaki aktualnie istnieje Sokrates, gdy biegnie. Zdanie jest jakby nazwą pewnego obiektu, który jednakowoż nie da się zredukować do rzeczy; tak np. zdanie "Sokrates biega" odnosi się do tego samego co *quasi*-nazwa "bieganie Sokratesa".

Skutkiem zmiany orientacji w filozofii nowożytnej, problem odniesienia zdań podzielił losy innych scholastycznych problemów i przez kilkaset lat pozostawał w ukryciu, by dopiero pod koniec XIX wieku ujrzeć światło dzienne. Tym, który podjął ów problem na nowo był Gottlob Frege. W słynnym artykule *Sens i znaczenie* (por. [6]) Frege analizuje nazwy i zdania (najważniejsze syntaktyczne składniki języka) pod kątem ich sensu i znaczenia (*Bedeutung*). Należy dodać, iż termin "znaczenie" Frege rozumie jako to, do czego nazwa lub zdanie się odnosi, to co denotuje.

Nie będziemy omawiać Fregowskiej teorii nazw. To co dla nas istotne to to, że Frege przyznaje zdaniu zarówno sens jak i znaczenie (denotację). Sensem zdania jest myśl, którą to zdanie wyraża, ale nie jest to myśl pojęta subiektywistycznie (jako wytwór umysłu, jak chciał Ockham), ale jest to obiektywna jej treść: "Myśli nie są w procesie myślenia wytwarzane, lecz jedynie *ujmowane*; są to twory od wszelkiej psychiki niezależne (...)" ([28], s. XII).

Dalej Frege zapytuje co jest znaczeniem zdania i po subtelnej argumentacji dochodzi do wniosku, że tym do czego zdanie się odnosi jest Prawda oraz Fałsz, rozumiane jako obiekty. Frege pisze ([6], s. 70):

> W ten sposób dochodzimy do uznania *wartości logicznej* zdania za jego znaczenie. Przez wartość logiczną zdania rozumiem okoliczność, że jest ono prawdziwe, lub że jest fałszywe. Innych wartości logicznych nie ma. Jedną z nich nazywam krótko *Prawdą*, a drugą *Fałszem*.

Przytoczmy jeszcze stanowisko Jana Łukasiewicza z pracy z 1920 roku, dobitnie wyrażające pogląd Fregego (cyt. za B. Wolniewicz, zob. [6], s. 71, przyp. 31):

> Dwa różne zdania prawdziwe np. «2 razy 2 jest 4» i «Warszawa leży nad Wisłą», różnią się tylko swą *treścią*, oznaczają zaś ten sam *przedmiot*, to jest prawdę, tak jak wyrażenia «2 razy 2» i «3 więcej 1» różnią się tylko swą treścią, oznaczają zaś *ten sam* przedmiot, to jest liczbę 4. Wszystkie zdania prawdziwe oznaczają jeden i ten sam przedmiot, mianowicie prawdę, a wszystkie zdania fałszywe oznaczają jeden i ten sam przedmiot, mianowicie fałsz. Prawdę i fałsz uważam za przedmioty w tem samem znaczeniu *jednostkowe*, co liczby 2 lub 4. Mamy tyle różnych nazw jednej tylko prawdy, ile zdań prawdziwych, i tyle różnych nazw jednego tylko fałszu, ile zdań fałszywych. Ontologicznie prawdzie odpowiada byt, fałszowi niebyt.

Do poglądów Fregego często jeszcze będziemy się odwoływać, natomiast teraz scharakteryzujmy pokrótce koncepcję Alexiusa Meinonga. Meinong zastanawiając się co jest przedmiotem negatywnego sądu "Nie doszło do żadnych niepokojów", stwierdził, że z jednej stony jest to pewien *obiekt*, mianowicie *niepokoje*, do których właśnie nie doszło, a z drugiej strony jest to pewien fragment rzeczywistości (tzw. *obiektyw*), mianowicie fakt, *że nie doszło do żadnych niepokojów*. W [11] (s. 49) czytamy:

> Obiekt pokrywa się tutaj z tym co osądzane, obiektyw z tym, co jest stwierdzane. W tej mierze sąd ma więc nie jeden przedmiot, lecz takie dwa, z których każdy miałby zatem prawo nazywać się «przedmiotem sądu».

Oczywistością jest, iż własność posiadania obiektywu nie jest jedynie sprawą poznania negatywnego, ale każdy sąd (w tym sąd fałszywy) przedstawia jakiś obiekt i jakiś obiektyw. Stanowisko Meinonga jest w tym sensie uogólnieniem teorii Fregego, którą otrzymujemy z teorii Meinonga przyjmując *extra* postulat, że istnieją tylko dwa obiektywy. Należy jednak dodać, że w przeciwieństwie do Fregego, Meinong nie postawił pytania o to, jaki jest związek obiektywu zdania złożonego z obiektywami zdań prostych występujących w tamtym (por. [24], s. 236), przez co treści logiczne jego teorii nie dorównują treściom teorii Fregego.

0.2 *Tractatus logico-philosophicus* Wittgensteina

Pomysły semantyczne Fregego i Meinonga zaowocowały oryginalną i dojrzałą teorią wyłożoną w książce *Tractatus logico-philosophicus* autorstwa Ludwiga Wittgensteina. Autor już w pierwszym zdaniu daje dobitnie do zrozumienia, iż zrywa ze stanowiskiem Arystotelesowskim, wedle którego świat to zbiór rzeczy i relacje między nimi; czytamy (por. [23]):

> 1 Świat jest wszystkim, co jest faktem.
>
> 1.1 Świat jest ogółem faktów, nie rzeczy.
>
> 1.11 Świat jest wyznaczony przez fakty oraz przez to, że są to *wszystkie* fakty.
>
> 1.2 Świat rozpada się na fakty.

Dalej, Wittgenstein dokonuje zanurzenia faktów, a więc i świata w sferę możliwości:

> 1.13 Światem są fakty w przestrzeni logicznej.

Termin "przestrzeń logiczna" jest ważnym pojęciem ontologii Wittgensteina, a należy ją rozumieć jako zbiór możliwych konfiguracji stanów rzeczy. Stany rzeczy są to natomiast "twory tylko możliwe: jedne z nich są rzeczywiste, drugie urojone. Pierwsze występują w świecie jako «fakty pozytywne», drugie jako «fakty negatywne»" ([26], s. XIV). Przy tych wyjaśnieniach stają się lepiej zrozumiałe następujące tezy:

> 2.04 Ogół istniejących stanów rzeczy jest światem.
>
> 2.05 Ogół istniejących stanów rzeczy wyznacza też, jakie stany rzeczy nie istnieją.
>
> 2.06 Istnienie i nieistnienie stanów rzeczy jest rzeczywistością.

Wobec powyższego, jest oczywiste, że pojęcie stanu rzeczy jest ogólniejsze od pojęcia faktu, z czego wynika, że żadna formalizacja idei *Traktatu* nie może obrać pojęcia fakt za pojęcie pierwotne. Na kwestię tę uwagę zwrócił Bertrand Russell jeszcze w roku 1919, jednakowoż odpowiedź jaką usłyszał od Wittgensteina była dosyć wymijająca (por. [27], s. 170, przyp. 13).

Wszystkie tezy, o których była dotychczas mowa są *stricte* ontologiczne; powiązanie języka ze światem Wittgenstein ujmuje w tezie 4 i jej rozwinięciach:

> 4.021 Zdanie jest obrazem rzeczywistości. Albowiem rozumiejąc je, znam przedstawianą przez nie sytuację.
>
> 4.023 Zdanie jest opisem pewnego stanu rzeczy.
>
> 4.024 Rozumieć zdanie, znaczy wiedzieć, co jest faktem, gdy jest prawdziwe.
>
> 4.031 Zamiast mówić: to zdanie ma ten a ten sens, można by rzec: to zdanie przedstawia tę a tę sytuację.
>
> 4.04 W zdaniu musi się dać wyróżnić akurat tyle, co w przedstawianej przez nie sytuacji.

Założeniem, które odgrywa w filozofii Wittgensteina szczególną rolę, jest tzw. *atomizm logiczny*, czyli teza która głosi, iż istnieją sytuacje proste – najmniejsze fragmenty świata. Okazuje się ponadto, że sytuacje proste to nic innego jak stany rzeczy. Wyrazem tego poglądu jest wspomniana już teza 1.2 oraz teza:

> 1.21 Jedno może być faktem lub nie być, a wszystko inne pozostać takie samo.

Ponadto, wszystkie sytuacje proste (stany rzeczy) oraz niektóre sytuacje złożone są niezależne od siebie. Tezę tę Wittgenstein wyraża w dwóch wersjach: ontologicznej i semantycznej:

> 2.061 Stany rzeczy są od siebie niezależne.
>
> 2.062 Z istnienia lub nieistnienia jednego stanu rzeczy nie można nic wnosić o istnieniu lub nieistnieniu drugiego.
>
> 4.211 Jest oznaką zdania elementarnego, że żadne zdanie elementarne nie

może być z nim sprzeczne.

5.134 Ze zdania elementarnego nie da się wnioskować żadnego innego.

Na koniec tego krótkiego przeglądu tez *Traktatu* podsumujmy semantykę Wittgensteina następującym schematem (por. [27], s. 95):

zdanie $\longmapsto$ sytuacja możliwa
zdanie elementarne $\longmapsto$ sytuacja możliwa prosta (stan rzeczy)
zdanie prawdziwe $\longmapsto$ fakt
zdanie elementarne prawdziwe $\longmapsto$ fakt atomowy.

0.3 Ontologia sytuacji

Tractatus logico-philosophicus wywarł mocny wpływ na dwóch autorów polskich: Romana Suszkę i Bogusława Wolniewicza. Obaj podjęli próbę formalizacji ontologicznych i semantycznych idei tam zawartych (por. [27], [25], [22]) stosując różne metody: Suszko – logiczne, Wolniewicz – algebraiczne. Dla Suszki sprawą pierwszorzędną było sformalizowanie *relacji opisywania przez dwa zdania tej samej sytuacji.* W rezultacie, Suszko wzbogacił język logiki zdaniowej o nowy spójnik $\equiv$ którego zamierzona interpretacja w dowolnym modelu jest następująca:

$$\alpha \equiv \beta \quad \Leftrightarrow \quad \text{zdania } \alpha, \beta \text{ przedstawiają tą samą sytuację.}$$

Suszko przeciwstawił spójnik $\equiv$ spójnikowi materialnej równoważności $\leftrightarrow$, której zamierzoną interpretacją jest by $\alpha \leftrightarrow \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy α i β mają taką samą wartość logiczną. Oczywiście jeśli zdania opisują tą samą sytuację muszą mieć tą samą wartość logiczną, tzn. prawem logiki Suszki musi być implikacja: $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta)$. Implikację odwrotną Suszko nazwał Aksjomatem Fregego (por. [21]), gdyż wynika z niej, że wszystkie zdania prawdziwe odnoszą się do tej samej sytuacji i tak samo zdania fałszywe odnoszą się do jednej sytuacji. Logika klasyczna (logika spójników prawdziwościowych) jest zatem Fregowska, bo utożsamia spójnik identyczności ze spójnikiem równoważności, przez co Aksjomat Fregego jest spełniony. Istnieją jednakowoż logiki nie-Fregowskie, tj. takie, w których Aksjomat Fregego nie jest spełniony; Suszko większość swych prac poświęcił badaniom tych logik.

Nie będziemy w niniejszym wprowadzeniu omawiać koncepcji Wolniewicza, jako że robimy to szczegółowo w rozdziale 1. Porównamy jedynie za

Mieczysławem Omyłą układy semantyczne przyjmowane przez Wolniewicza i Suszkę.

Układem semantycznym Suszki nazywamy piątkę uporządkowaną (por. [14], s. 57; [13], s. 156):

$$\langle \mathcal{S}, Cn, U, h, v \rangle \,,$$

gdzie $\mathcal{S}$ jest językiem o zbiorze zdań S i zbiorze zdań prostych V, Cn jest l-zwartą operacją konsekwencji (por. [16], s. 22-23), U jest dowolnym zbiorem niepustym, h jest funkcją ze zbioru zdań S w U, v – funkcją z S w wartości logiczne $\{0, 1\}$, przy czym spełnione są warunki:

i. v jest funkcją charakterystyczną pewnej teorii zupełnej w języku $\mathcal{S}$,

ii. $\forall_{\alpha,\beta\in S}[h(\alpha) = h(\beta) \;\Leftrightarrow\; \forall_{\gamma\in S}\; v(\gamma) = v(\gamma[\frac{\alpha}{\beta}])]$.

($\gamma[\frac{\alpha}{\beta}]$ oznacza formułę, która powstaje z formuły γ przez zastąpienie każdego wystąpienia α zdaniem β.)

Układem semantycznym Wolniewicza nazywamy z kolei szóstkę uporządkowaną:

$$\langle \mathcal{S}, Cn_2, SE, \mathcal{R}, \mathcal{Z}, Z_0 \rangle \,,$$

przy czym $\mathcal{S}$ jest językiem, Cn_2 – klasyczną operacją konsekwencji (por. sekcja 1.2), SE – niepustym zbiorem, $\mathcal{R}$ – niepustą rodziną podzbiorów zbioru SE oraz spełnione są następujące warunki:

i. $\bigcap \mathcal{R} \neq \emptyset$,

ii. $\bigcup \mathcal{R} \neq SE$,

iii. elementy rodziny $\mathcal{R}$ są maksymalne w sensie inkluzji,

iv. $\mathcal{Z}$ jest funkcją przyporządkowującą każdemu $R \in \mathcal{R}$ teorię zupełną w języku $\mathcal{S}$,

v. Z_0 jest pewną wyróżnioną teorią zupełną oraz istnieje $R_0 \in \mathcal{R}$ takie, że $\mathcal{Z}(R_0) = Z_0$,

vi. $\forall_{R\in\mathcal{R}}\; \forall_{\alpha\in S}(\alpha \in \mathcal{Z}(R) \;\Rightarrow\; \exists_{x\in R}\; \forall_{R'\in\mathcal{R}}(x \in R' \;\Rightarrow\; \alpha \in \mathcal{Z}(R')))$.

Nie będziemy wnikać w relacje zachodzące między układami Suszki i Wolniewicza (zob. w tej kwestii [14]). W niniejszej pracy posługiwać się będziemy następującym układem semantycznym:

$$\langle \mathcal{S}, Cn_2, \mathcal{L}, w_{\mathcal{L}}, s \rangle \,,$$

gdzie $\mathcal{S}$ i Cn_2 są takie jak wyżej, natomiast $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ jest kratą zupełną, atomową (o zbiorze atomów $At(L)$) i koatomową (o zbiorze koatomów $Kt(L)$), $w_{\mathcal{L}}$ jest wyróżnionym koatomem, zwanym światem realnym, zaś s jest wartościowaniem sytuacyjnym $s\colon V \to At(L)$.

Łatwo zauważyć, że powyższy układ jest semantycznym układem Wolniewicza, gdyż dla:

$$SE = L,$$

$$\mathcal{R} = \{(w] : w \in Kt(L)\},$$

$$\mathcal{Z} : (w] \mapsto \{\alpha \in S : w \Vdash_s \alpha\}$$

(gdzie $\Vdash_s$ jest rozszerzeniem wartościowania s – por. (4.1)-(4.5)),

$$Z_0 = \{\alpha \in S : w_{\mathcal{L}} \Vdash_s \alpha\}.$$

zachodzą wszystkie warunki (i)-(vi).

Rozdział 1

Preliminaria

Celem niniejszego rozdziału jest przypomnienie podstawowych pojęć algebry uniwersalnej i logiki formalnej, przywołanie twierdzeń wykorzystywanych w dalszych rozdziałach oraz ustalenie notacji. W opracowaniu tego rozdziału korzystaliśmy ze znanych podręczników min. [3], [7], [19], [1].

1.1 Podstawowe pojęcia algebraiczne

Niech będzie dany niepusty zbiór X. Relację $\Theta \subseteq X \times X$ nazywamy *relacją tolerującą* lub *tolerancją* (por. [8], 1.1.4), gdy jest ona zwrotna i symetryczna. *Blokiem relacji* Θ nazywamy każdy maksymalny zbiór $B \subseteq X$, na którym relacja Θ jest przechodnia, tj. zbiór spełniający warunki:

$$\forall_{x,y \in B}\ x\Theta y, \tag{1.1}$$

$$\forall_{C \subseteq X}((\forall_{x,y \in C}\ x\Theta y)\ \&\ B \subseteq C\ \Rightarrow\ B = C). \tag{1.2}$$

Zbiór wszystkich bloków oznaczmy przez $X/_{\Theta}$. Jeżeli tolerancja Θ jest ponadto przechodnia, to nazywa się *równoważnością na* X. Bloki równoważności – tzw. *klasy abstrakcji* – są wówczas zbiorami rozłącznymi, każdy zatem blok B jest w jednoznaczny sposób wyznaczony przez dowolny swój element $x \in B$:

$B = \{y \in X : x\Theta y\} = [x]_\Theta$. W przeciwieństwie do klas abstrakcji, bloki tolerancji mogą się kroić niepusto. Na pojęcie tolerancji należy zatem patrzeć jak na uogólnienie pojęcia równoważności, zaś na bloki, jak na uogólnienia klas abstrakcji. Przypomnijmy też, że *pokryciem zbioru* X nazywamy każdą rodzinę $\mathcal{R} \subseteq P(X)$ taką, że $\bigcup \mathcal{R} = X$. Jeżeli na dodatek $R \cap S = \emptyset$, dla dowolnych $R, S \in \mathcal{R}$, to pokrycie $\mathcal{R}$ nazywamy *partycją zbioru* X.

Binarną relację $\leqslant$ w zbiorze X nazywamy *relacją częściowego porządku* wtedy gdy jest ona zwrotna, słabo antysymetryczna oraz przechodnia. Z każdą taką relacją związana jest pewna relacja $<$, którą będziemy nazywać *silną relacją częściowego porządku*, a która dana jest wzorem:

$$x < y \;\Leftrightarrow\; x \leqslant y \;\&\; x \neq y.$$

Relacja $<$ jest antyzwrotna, antysymetryczna i przechodnia. Jeśli X jest dowolnym zbiorem niepustym, zaś $\leqslant$ relacją częściowego porządku w zbiorze X to strukturę $\langle X, \leqslant \rangle$ nazywamy *zbiorem częściowo uporządkowanym*, lub też będziemy mówić, że X *jest częściowo uporządkowany przez* $\leqslant$.

Załóżmy, że $x < y$; jeśli nie istnieje żaden z taki, że $x < z < y$, to fakt ten wyrażamy pisząc $x \prec y$, mówimy zaś, że y *pokrywa* x. *Elementem maksymalnym* w $Y \subseteq X$ nazywamy każdy $y \in Y$ taki, że dla dowolnego $z \in Y$ jeśli $y \leqslant z$ to $y = z$. Analogicznie, *elementem minimalnym* w $Y \subseteq X$ jest każdy $y \in Y$ taki, że dla dowolnego $z \in Y$ jeśli $z \leqslant y$ to $y = z$. Dalej, y jest *elementem największym* w zbiorze $Y \subseteq X$ (odpowiednio, *najmniejszym*) gdy $y \in Y$ oraz dla dowolnego $z \in Y$ zachodzi: $z \leqslant y$ (odpowiednio, $y \leqslant z$). Jeśli w Y istnieje element największy (najmniejszy), to jest on jedynym elementem maksymalnym (minimalnym).

Niech $\langle X, \leqslant \rangle$ będzie częściowym porządkiem oraz $C \subseteq X$. Jeśli dla dowolnych $x, y \in C$ jest tak, że $x \leqslant y$ lub $y \leqslant x$, to zbiór C nazywamy *łańcuchem*. Podobnie, *antyłańcuchem* nazywamy każdy podzbiór $A \subseteq X$ taki, że dla dowolnych $x, y \in A$: $x \nleqslant y$ oraz $y \nleqslant x$. Łańcuch (antyłańcuch) jest *maksymalny*, gdy żaden jego nadzbiór właściwy, łańcuchem (antyłańcuchem) nie jest.

Jeśli łańcuch C jest skończony, to jego *długością* $l(C)$ nazywamy liczbę $|C| - 1$ (analogicznie definiujemy *długość antyłańcucha*). Jeśli długość każdego łańcucha da się ograniczyć z góry pewną liczbą naturalną n, przy czym istnieje łańcuch o długości n, to mówimy, że *częściowy porządek* $\langle X, \leqslant \rangle$ *ma długość* n, a abstrahując od konkretnej wartości n powiemy, że $\langle X, \leqslant \rangle$ jest *skończenie długi*.

Ustalmy dowolny podzbiór Y zbioru X. Ograniczeniem górnym zbioru Y nazywamy taki element $x \in X$, że $y \leqslant x$, dla każdego $y \in Y$. Najmniejsze ograniczenie górne zbioru Y (o ile takie istnieje) nazywamy *supremum zbioru* Y lub *kresem górnym* Y i oznaczamy symbolem "$\sup_{\leqslant} Y$" (jeśli relacja jest ustalona, piszemy po prostu "$\sup Y$"). W analogiczny sposób będziemy rozumieć *ograniczenie dolne zbioru* Y, zaś największe ograniczenie dolne (o ile istnieje) nazwiemy *infimum zbioru* Y lub *kresem dolnym* Y i oznaczymy symbolem "$\inf_{\leqslant} Y$" (lub "$\inf Y$"). Jeśli $Y = \{x, y\}$ to kładziemy:

$$x \vee y = \sup\{x, y\}, \quad x \wedge y = \inf\{x, y\}.$$

Zdefiniujemy teraz podstawowe pojęcie kraty.

Definicja 1.1 *Częściowy porządek $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant \rangle$ nazywamy* kratą *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x, y \in L$ istnieje zarówno $x \vee y$ jak i $x \wedge y$. O relacji $\leqslant$ posiadającej powyższą własność mówimy, że jest* kratowa.

Istnieje inna, zakresowo równoważna, definicja kraty. Niech mianowicie będzie dany dowolny niepusty zbiór L oraz dwie operacje $\vee\colon L \times L \to L$, $\wedge\colon L \times L \to L$ spełniające dla dowolnych $x, y, z \in L$ następujące warunki:

$$x \vee x = x, \quad x \wedge x = x, \tag{1.3}$$

$$x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x, \tag{1.4}$$

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), \quad (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), \tag{1.5}$$

$$x \vee (x \wedge y) = x, \quad x \wedge (x \vee y) = x. \tag{1.6}$$

Jeżeli operacje $\vee$ oraz $\wedge$ spełniają warunki (1.3)-(1.6) to wyznaczają pewną relację kratową $\leqslant$; jest ona dana wzorem:

$$x \leqslant y \;\Leftrightarrow\; x \vee y = y,$$

lub równoważnie:

$$x \leqslant y \;\Leftrightarrow\; x \wedge y = x,$$

dla dowolnych $x, y \in L$. Wówczas kresy zgadzają się z operacjami $\vee$, $\wedge$; ściślej:

$$\sup_{\leqslant}\{x, y\} = x \vee y,$$

$$\inf_{\leqslant}\{x, y\} = x \wedge y.$$

Odwrotnie, $\sup_{\leqslant}$ oraz $\inf_{\leqslant}$ wzięte jako funkcje z $L \times L$ w L, spełniają warunki (1.3)-(1.6) (por. [3], I.5.8). Z tych powodów, na kratę można patrzeć z jednej strony, jak na system relacyjny $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant \rangle$, z drugiej, jak na algebrę abstrakcyjną $\mathcal{L} = \langle L, \vee, \wedge \rangle$.

Niech $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant \rangle$ będzie dowolną kratą oraz $M \subseteq L$. Zbiór M wraz z relacją $\leqslant$ zawężoną do M, będziemy nazywać *podkratą kraty* $\mathcal{L}$ wtedy gdy, $x \vee y \in M$ oraz $x \wedge y \in M$, dla dowolnych $x, y \in M$. Fakt, że $\mathcal{M} = \langle M, \leqslant |_{M \times M} \rangle$ jest podkratą kraty $\mathcal{L}$, notujemy $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$.

Ważnymi przykładami podkrat są filtry i ideały. Jeśli $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant \rangle$ jest dowolną kratą oraz $F \subseteq L$, to zbiór F nazywamy *filtrem* wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

$$\forall_{x,y \in F}\ x \wedge y \in F, \tag{1.7}$$

$$\forall_{x \in F} \forall_{y \in L} (x \leqslant y \ \Rightarrow\ y \in F). \tag{1.8}$$

Pojęcie ideału definiujemy dualnie: podzbiór $I \subseteq L$ nazywamy *ideałem* wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{x,y \in I}\ x \vee y \in I, \tag{1.9}$$

$$\forall_{x \in I} \forall_{y \in L} (y \leqslant x \ \Rightarrow\ y \in I). \tag{1.10}$$

Filtr F nazywamy:

- *właściwym*, gdy $F \neq L$,
- *maksymalnym*, gdy dla dowolnego filtru $F' \subseteq L$, jeżeli $F \subseteq F'$ to $F' = F$ lub $F' = L$,
- *głównym*, gdy istnieje takie $x \in L$, że $F = [x) = \{y \in L : x \leqslant y\}$.

Analogiczne definicje wprowadzamy dla ideału; ideał $I \subseteq L$ nazywamy:

- *właściwym*, gdy $I \neq L$,
- *maksymalnym*, gdy dla dowolnego ideału $I' \subseteq L$, jeżeli $I \subseteq I'$ to $I' = I$ lub $I' = L$,
- *głównym*, gdy istnieje takie $x \in L$, że $I = (x] = \{y \in L : y \leqslant x\}$.

Wprowadźmy z kolei, inne ważne pojęcie homomorfizmu krat.

Definicja 1.2 *Niech dane będą kraty* $\mathcal{L} = \langle L, \vee_L, \wedge_L \rangle$*,* $\mathcal{M} = \langle M, \vee_M, \wedge_M \rangle$ *oraz funkcja* $h \colon L \to M$*. Funkcję* h *nazywamy* homomorfizmem (kraty $\mathcal{L}$ w kratę $\mathcal{M}$)*, gdy dla dowolnych* $x, y \in L$ *spełnione są następujące równości:*

$$h(x \vee_L y) = h(x) \vee_M h(y), \tag{1.11}$$

$$h(x \wedge_L y) = h(x) \wedge_M h(y), \tag{1.12}$$

Ponadto, homomorfizm nazwiemy zanurzeniem*, gdy funkcja* h *jest różnowartościowa oraz* izomorfizmem*, gdy* h *jest bijekcją.*

Jeżeli h jest izomorfizmem krat $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, to mówimy, że są one *izomorficzne* i piszemy $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$. Dla uproszczenia notacji będziemy zazwyczaj pomijać indeksy przy operacjach supremum i infimum: np. warunek (1.11) napiszemy po prostu $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$. Podobna konwencja stosuje się do relacji $\leqslant_L$. Poniżej prezentujemy lemat, który ujmuje pojęcie izomorfizmu krat w terminach relacji kratowych.

Lemat 1.1 ([4], 2.11) *Niech* $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant \rangle$*,* $\mathcal{M} = \langle M, \leqslant \rangle$ *będą dowolnymi kratami. Bijekcja* $h \colon L \to M$ *jest izomorfizmem krat* $\mathcal{L}$ *i* $\mathcal{M}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$\forall_{x,y \in L} (x \leqslant y \iff h(x) \leqslant h(y)). \quad \blacksquare$$

Jeśli krata $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant \rangle$ posiada element najmniejszy, to oznaczamy go 0_L, a gdy nie będzie groziło nieporozumienie po prostu 0; element ten nazywamy *zerem* (*kraty* $\mathcal{L}$). Dla podkreślenia faktu, że w $\mathcal{L}$ istnieje zero, piszemy $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0 \rangle$. Analogicznie element największy – *jedynka* (*kraty* $\mathcal{L}$) – oznaczamy, 1_L lub 1 i piszemy $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 1 \rangle$. Kratę posiadającą zarówno zero jak i jedynkę nazywamy *ograniczoną*.

Niech $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1 \rangle$; dowolny element $x \in L$ taki, że $0 \prec x$ nazywamy *atomem* (*kraty* $\mathcal{L}$), zaś ich ogół oznaczamy przez $At(L)$. Podobnie, jeśli $x \prec 1$ to element x nazywamy *koatomem* (*kraty* $\mathcal{L}$), a ogół koatomów oznaczamy przez $Kt(L)$. Ponadto, dla dowolnego $x \in L$ kładziemy:

$$At(x) = \{a \in At(L) : a \leqslant x\}, \quad Kt(x) = \{w \in Kt(L) : x \leqslant w\}.$$

Kratę $\mathcal{L}$ nazywamy *atomową* gdy $At(x) \neq \emptyset$, dla dowolnego $x \in L \setminus \{0\}$. Analogicznie, $\mathcal{L}$ jest *koatomowa* gdy $Kt(x) \neq \emptyset$, dla dowolnego $x \in L \setminus \{1\}$. Kratę atomową $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0 \rangle$ nazywamy *atomistyczną* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $x \in L$ istnieje $A \subseteq At(x)$ takie, że $x = \sup A$. Zachodzi następujący lemat.

Lemat 1.2 ([24], s. 308) *W dowolnej atomowej kracie* $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0\rangle$ *następujące warunki są równoważne:*

i. $\mathcal{L}$ *jest atomistyczna,*

ii. $\forall_{x\in L}\ x = \sup At(x)$,

iii. $\forall_{x,y\in L}(At(x) = At(y) \ \Rightarrow\ x = y)$.

Dowód. Dla dowodu implikacji (i)⇒(ii) ustalmy dowolny $x \in L$. Istnieje wówczas $A \subseteq At(L)$ takie, że $x = \sup A$. Pokażemy, że x jest supremum zbioru $At(x)$ tj. że $x = \sup At(x)$. Zauważmy po pierwsze, że oczywiście $a \leqslant x$, dla każdego $a \in At(x)$. Po drugie, niech y będzie ograniczeniem górnym zbioru $At(x)$. Łatwo dostrzec, że $A \subseteq At(x)$, więc w szczególności mamy $a \leqslant y$, dla $a \in A$. Stąd dostajemy: $x = \sup A \leqslant y$, co należało pokazać.

Implikacje (ii)⇒(i) i (ii)⇒(iii) są trywialne.

Dla dowodu implikacji (iii)⇒(ii), ustalmy $x \in L$ oraz dowolne ograniczenie górne $y \in L$ zbioru $At(x)$ i przypuśćmy niewprost, że $x \nleqslant y$. Z hipotezy dostajemy $x \wedge y < x$, zatem z założenia, wynika, iż istnieje $a \in At(L)$ taki, że $a \nleqslant x \wedge y$ i $a \leqslant x$. Z tego ostatniego zaś i faktu, że y jest ograniczeniem górnym $At(x)$ mamy $a \leqslant y$ i w rezultacie $a \leqslant x \wedge y$; sprzeczność. ∎

Kratą zupełną będziemy nazywali każdą kratę $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant\rangle$, która posiada następującą własność: dla dowolnego $X \subseteq L$ istnieje supremum zbioru X. Dalej, powiemy, że $\mathcal{L}$ jest *relatywnie komplementarna*, gdy dla dowolnych $x, y, z \in L$ spełniony jest warunek:

$$x \leqslant y \leqslant z \ \Rightarrow\ \exists_{y'\in L}(x = y \wedge y' \ \&\ z = y \vee y'). \tag{1.13}$$

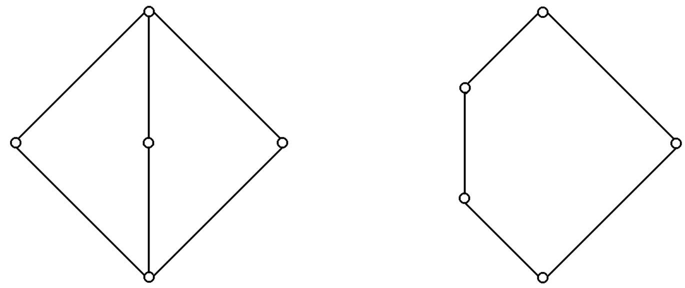
W szczególnym przypadku, jeśli $\mathcal{L}$ jest kratą ograniczoną oraz powyższy warunek spełniony jest dla $x = 0$ i $z = 1$, mówimy, że krata $\mathcal{L}$ jest *komplementarna*.

Rozważmy następujące warunki:

$$x \leqslant z \ \Rightarrow\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z, \tag{1.14}$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \tag{1.15}$$

Kratę $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant\rangle$ spełniającą (dla wszystkich $x, y, z \in L$) warunek (1.14) nazywamy *modularną*; jeśli zaś spełniony jest warunek (1.15) mówimy, że krata jest *dystrybutywna*.



$\mathcal{M}_3$ $\mathcal{N}_5$

Rysunek 1

Łatwo zauważyć, że każda krata dystrybutywna jest również modularna. Aby pokazać, że implikacja odwrotna nie zachodzi, wystarczy rozważyć kratę $\mathcal{M}_3$ (tzw. *diament*); por. rysunek 1. Dodajmy, że krata jest dystrybutywna, gdy dla dowolnych $x, y, z \in L$ spełnia warunek dualny:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Odnotujmy dwa klasyczne twierdzenia; pierwszym jest wynik R. Dedekinda i G. Birkhoffa, charakteryzujący kraty modularne i dystrybutywne przy pomocy $\mathcal{M}_3$ i $\mathcal{N}_5$ (tzw. *pentagon*). Drugim jest twierdzenie Jordana-Höldera ujmujące związek, jaki zachodzi między modularnością a długością łańcuchów maksymalnych.

Twierdzenie 1.1 ([7], II.1.2)

i. Krata $\mathcal{L}$ jest modularna wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podkraty izomorficznej z $\mathcal{N}_5$.

ii. Krata $\mathcal{L}$ jest dystrybutywna wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podkraty izomorficznej z $\mathcal{N}_5$ ani z $\mathcal{M}_3$. ■

Twierdzenie 1.2 ([7], IV.2.1) *Jeśli $\mathcal{L}$ jest skończenie długą kratą modularną to wszystkie łańcuchy maksymalne mają taką samą długość.* ■

Jeżeli krata $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ jest dystrybutywna i komplementarna, to nazywamy ją *algebrą Boole'a*. Każdy punkt x algebry Boole'a posiada swoje dopełnienie, tzn. takie $x' \in L$, że $x \vee x' = 1$ i $x \wedge x' = 0$. Ponadto, z dystrybutywności wynika, że dopełnienie jest jedyne. Można wobec tego zdefiniować funkcję dopełnienia $x \mapsto x'$.

Tak samo jak w przypadku krat, istnieje inna – równościowa – definicja algebry Boole'a. Niech mianowicie L będzie dowolnym niepustym zbiorem oraz $0, 1 \in L$ takie, że $0 \neq 1$. Niech ponadto, funkcje $\vee \colon L \times L \to L$, $\wedge \colon L \times L \to L$, $' \colon L \to L$ spełniają warunki (1.3)-(1.6) oraz

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \tag{1.16}$$

$$x \vee 0 = x, \quad x \wedge 0 = 0, \tag{1.17}$$

$$x \vee x' = 1, \quad x \wedge x' = 0. \tag{1.18}$$

Algebra abstrakcyjna $\langle L, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ traktowana jako krata, jest dystrybutywna i komplementarna, jest wiec algebrą Boole'a.

Nieskończona zupełna algebra Boole'a może w ogóle nie mieć atomów. Jednakowoż, jeśli jest ona atomowa to jest też atomistyczna. Fakt ten wyraża następujące twierdzenie A. Tarskiego:

Twierdzenie 1.3 ([4], I.7.2) *Każda zupełna i atomowa algebra Boole'a* $\mathcal{B} = \langle B \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ *jest izomorficzna z ciałem zbiorów* $\langle P(At(B)), \cup, \cap, -, \emptyset, At(B)\rangle$. ■

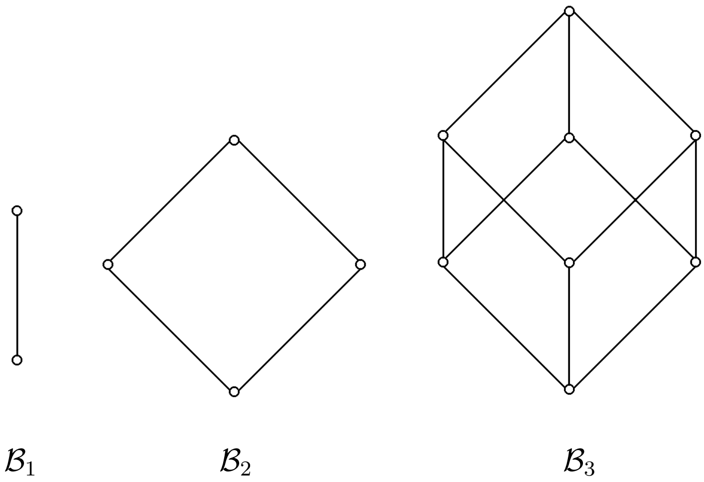
Z twierdzenia 1.3 wynika praktyczny wniosek:

Wniosek 1.1 ([4], s. 43)

i. Niech $\mathcal{B}$ będzie skończoną algebrą Boole'a. Istnieje wówczas liczba naturalna $n > 0$ taka, że $\mathcal{B}$ ma 2^n elementów, w tym n atomów.

ii. Jeśli dwie skończone algebry Boole'a mają taką samą liczbę elementów, to są izomorficzne. ■

Wobec wniosku 1.1 istnieje przeliczalnie wiele (z dokładnością do izomorfizmu) skończonych algebr Boole'a i są to: $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \ldots$ przy czym $\mathcal{B}_n$ oznacza 2^n-elementową algebrę Boole'a.



Rysunek 2

1.2 Podstawowe pojęcia logiczne

Niech $V = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ będzie przeliczalnym nieskończonym zbiorem, którego elementy nazywamy *zmiennymi zdaniowymi* lub *zdaniami prostymi*. *Zdaniem* nazywamy natomiast element zbioru S, czyli zbioru zbudowanego ze zmiennych zdaniowych, przy pomocy spójników $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$. Ściślej, zbiór S, to najmniejszy zbiór, spełniający dwa następujące warunki:

i. $V \subseteq S$,

ii. jeśli $\alpha, \beta \in S$ to $(\alpha) \wedge (\beta), (\alpha) \vee (\beta), (\alpha) \rightarrow (\beta), \neg(\alpha) \in S$.

Algebrę $\mathcal{S} = \langle S, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg \rangle$ o sygnaturze $(2, 2, 2, 1)$ nazywamy *językiem zdaniowym*. Wedle powszechnego zwyczaju będziemy opuszczali niektóre nawiasy, np. zamiast $(p \vee q) \rightarrow r$ napiszemy $p \vee q \rightarrow r$.

Regułą wnioskowania nazywamy dowolną relację $r \subseteq Fin(S) \times S$, gdzie $Fin(S) = \{X \subseteq S : |X| < \aleph_0\}$. Jako przykłady reguł, rozważmy *regułę odrywania* r_o, zwaną też *modus ponens*:

$$r_o = \{(\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\}, \beta) : \alpha, \beta \in S\},$$

oraz *regułę sylogizmu* r_s:

$$r_s = \{(\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\}, \alpha \rightarrow \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in S\}.$$

Systemem logicznym nazywamy parę $\langle R, A\rangle$, o ile R jest zbiorem reguł, zaś $A \subseteq S$ (elementy zbioru A nazywamy *aksjomatami* systemu $\langle R, A\rangle$). Dla każdego systemu logicznego $\langle R, A\rangle$ określamy indukcyjnie zbiór $Cn(R, A)$ w następujący sposób:

i. $Cn^0(R, A) = A$,

ii. $Cn^{k+1}(R, A) = Cn^k(R, A) \cup \{\alpha \in S : \exists_{r \in R} \exists_{\pi \subseteq Cn^k(R,A)}\ (\pi, \alpha) \in r\}$,

iii. $Cn(R, A) = \bigcup_{k \in \omega} Cn^k(R, A)$.

Operacją konsekwencji związaną z systemem logicznym $\langle R, A\rangle$, nazywamy funkcję $Cn_{R,A} : P(S) \to P(S)$ daną wzorem:

$$Cn_{R,A}(X) = Cn(R, A \cup X),$$

dla $X \subseteq S$. Ważną własnością operacji konsekwencji jest jej *finitarność*, tzn. dla dowolnego $X \subseteq S$ spełnione jest:

$$Cn_{R,A}(X) = \bigcup\{Cn_{R,A}(Y) : Y \in Fin(X)\}. \tag{1.19}$$

Powiemy, że zbiór $X \subseteq S$ jest *niesprzeczny* (*w systemie* $\langle R, A\rangle$), wtedy gdy $Cn_{R,A}(X) \neq S$; w przeciwnym przypadku jest *sprzeczny*. Zbiór X nazwiemy *teorią*, gdy $Cn_{R,A}(X) = X$. Teoria X jest natomiast *zupełna*, gdy jest niesprzeczna oraz maksymalna, tj. dla dowolnego $\alpha \in S$ zachodzi:

$$\alpha \notin X \;\Rightarrow\; Cn_{R,A}(X \cup \{\alpha\}) = S.$$

Definicja 1.3 System logiki klasycznej KRZ *jest to system* $\langle\{r_o\}, \mathbb{A}_2\rangle$*, gdzie* $\mathbb{A}_2$ *jest zbiorem następujących aksjomatów:*

i. $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$,

ii. $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$,

iii. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$,

iv. $\alpha \wedge \beta \to \alpha$,

v. $\alpha \wedge \beta \to \beta$,

vi. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta \wedge \gamma))$, *vii.* $\alpha \to \alpha \vee \beta$,

viii. $\beta \to \alpha \vee \beta$,

ix. $(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \beta) \to (\alpha \vee \gamma \to \beta))$,

x. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$.

Operację konsekwencji wyznaczoną przez system logiki klasycznej, nazywamy *klasyczną operacją konsekwencji* i dla dowolnego $X \subseteq S$ przyjmujemy:

$$Cn_2(X) = Cn_{\{r_o\},\mathbb{A}_2}(X), \quad CL = Cn_2(\emptyset)$$

Elementy zbioru CL nazywamy *tezami KRZ*. Odnotujmy teraz twierdzenie ujmujące ważne własności klasycznej operacji konsekwencji.

Twierdzenie 1.4 *Dla dowolnego $X \subseteq S$ i dowolnych $\alpha, \beta \in S$ zachodzi:*

i. $\beta \in Cn_2(X \cup \{\alpha\}) \;\Leftrightarrow\; (\alpha \to \beta) \in Cn_2(X)$,

ii. $\neg\alpha \in Cn_2(X) \;\Leftrightarrow\; Cn_2(X \cup \{\alpha\}) = S$,

iii. $\alpha \in Cn_2(X) \;\Leftrightarrow\; Cn_2(X \cup \{\neg\alpha\}) = S$,

iv. $\alpha \wedge \beta \in Cn_2(X) \;\Leftrightarrow \alpha \in Cn_2(X) \;\&\; \beta \in Cn_2(X)$,

v. $Cn_2(X \cup \{\alpha \vee \beta\}) = Cn_2(X \cup \{\alpha\}) \cap Cn_2(X \cup \{\beta\})$. ■

Twierdzenie 1.4(i) w literaturze nazywane jest *twierdzeniem o dedukcji.*

Rozważmy zbiór $V^* = V \cup \{\neg p_0, \neg p_1, \neg p_2, \ldots\}$. Elementy zbioru V^* nazywamy *literałami*, zaś każde zdanie α będące koniunkcją, której członami są alternatywy literałów, nazwiemy *zdaniem o postaci normalnej*. Zachodzi następujące twierdzenie o postaci normalnej (napis $\beta \leftrightarrow \gamma$ jest metajęzykowym skrótem, oznaczającym zdanie $(\beta \to \gamma) \wedge (\gamma \to \beta)$):

Twierdzenie 1.5 ([9], s. 102) *Dla dowolnego $\alpha \in S$ istnieje zdanie o postaci normalnej α' takie, że $\alpha \leftrightarrow \alpha' \in CL$.* ■

Wprowadzimy teraz kilka najważniejszych pojęć semantycznych. *Wartościowaniem zero-jedynkowym* nazywamy każdą funkcję $v: S \to \{0,1\}$ spełniającą dla $\alpha, \beta \in S$ warunki:

i. $v(\alpha \wedge \beta) = 1 \;\Leftrightarrow\; v(\alpha) = 1$ & $v(\beta) = 1$,

ii. $v(\alpha \vee \beta) = 1 \;\Leftrightarrow\; v(\alpha) = 1$ lub $v(\beta) = 1$,

iii. $v(\alpha \to \beta) = 1 \;\Leftrightarrow\; v(\alpha) = 0$ lub $v(\beta) = 1$,

iv. $v(\neg\alpha) = 1 \;\Leftrightarrow\; v(\alpha) = 0$.

Zauważmy, że każde wartościowanie v jest jednoznacznie wyznaczone przez obcięcie $v|_V: V \to \{0,1\}$.

Definicja 1.4 *Zdanie α nazywamy* tautologią KRZ *wtedy i tylko wtedy, gdy $v(\alpha) = 1$, dla dowolnego wartościowania $v: S \to \{0,1\}$.*

Klasycznym wynikiem dotyczącym KRZ jest natępujące twierdzenie K. Gödla o pełności.

Twierdzenie 1.6 *Dla dowolnego $X \subseteq S$ oraz $\alpha \in S$ zachodzi:*

$$\alpha \in Cn_2(X) \;\Leftrightarrow\; (v[X] \subseteq \{1\} \;\Rightarrow\; v(\alpha) = 1, \textit{dla dowolnego wartościowania } v: S \to \{0,1\}). \quad \blacksquare$$

W szczególności, z twierdzenia o pełności wynika, że zbiór tez KRZ jest identyczny ze zbiorem tautologii KRZ (twierdzenie E. Posta). Z tego też powodu będziemy w tej pracy, terminy "teza KRZ" i "tautologia KRZ" używać zamiennie.

Rozdział 2

Kraty Wolniewicza

W rozdziale niniejszym omówimy teorię krat sytuacji przedstawioną przez Bogusława Wolniewicza w jego pierwszej monografii, poświęconej formalnej ontologii sytuacji, tj. w pracy [25]. Struktury spełniające aksjomaty tejże teorii, w tej pracy nazywa się $\mathbb{BW}$-kratami (od imienia i nazwiska autora teorii). Dodajmy, że Wolniewicz struktury te nazywa *kratami sytuacji elementarnych*, w skócie *SE-kratami*; termin ten rezerwujemy jednak dla krat ogólniejszych, od których wymagać będziemy jedynie zupełności, atomowości i koatomowości (por. koniec sekcji 2.1).

W sekcjach 2.3, 2.4 dowodzimy najważniejsze własności $\mathbb{BW}$-krat, charakteryzujących je w prostych teorio-mnogościowych pojęciach. Przede wszystkim, pokazuje się, że każda $\mathbb{BW}$-krata może być jednoznacznie skojarzona z pewną n-ką liczb kardynalnych, co umożliwia zhierarchizowanie (z dokładnością do izomorfizmu) klasy $\mathbb{BW}$-krat. Niemal wszystkie twierdzenia z tych sekcji, wprost pochodzą z prac [25], [24] lub są prostymi konsekwencjami zawartych tam wyników.

W pozostałych sekcjach dyskutujemy zależności między aksjomatami $\mathbb{BW}$-krat.

2.1 Aksjomatyka $\mathbb{BW}$-krat

Definicja 2.1 *Kratę $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ będziemy nazywać $\mathbb{BW}$-kratą wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące aksjomaty:*

i. *$\mathcal{L}$ jest zupełna, tj.:*

$$\forall_{X\subseteq L}\ \exists_{x\in L}[(\forall_{y\in X}\ y \leqslant x)\ \&\ \forall_{z\in L}((\forall_{y\in X}\ y \leqslant z)\ \Rightarrow\ x \leqslant z)].$$

ii. *$\mathcal{L}$ jest koatomowa, tj.:*

$$\forall_{x\in L\smallsetminus\{1\}}\ \exists_{y\in L}[x \leqslant y < 1\ \&\ \forall_{z\in L}(y < z\ \Rightarrow\ z = 1)].$$

iii. *$\mathcal{L}$ jest atomowa, tj.:*

$$\forall_{x\in L\smallsetminus\{0\}}\ \exists_{y\in L}[0 < y \leqslant x\ \&\ \forall_{z\in L}(z < y\ \Rightarrow\ z = 0)].$$

iv. *$\mathcal{L}$ jest rozdzielona (zbiorem koatomów $Kt(L)$), tj.:*

$$\forall_{x,y\in L}[y \nleqslant x\ \Rightarrow\ \exists_{w\in Kt(L)}(x \leqslant w\ \&\ y \nleqslant w)].$$

v. *$\mathcal{L}$ jest atomistyczna, tj.:*

$$\forall_{x\in L}\ \exists_{X\subseteq At(L)}\ x = \sup X.$$

vi. *$\mathcal{L}$ jest warunkowo dystrybutywna, tj.:*

$$\forall_{x,y,z\in L}[y \vee z \neq 1\ \Rightarrow\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)].$$

vii. $\forall_{x,y\in L\smallsetminus\{0,1\}}[x \vee y = 1\ \Rightarrow\ \exists_{a,b\in At(L)}(a \leqslant x\ \&\ b \leqslant y\ \&\ a \vee b = 1)].$

viii. *Dla atomów kraty $\mathcal{L}$ dopełnienie jest przechodnie, tj.:*

$$\forall_{x,y,z\in At(L)}[(x \vee y = 1\ \&\ y \vee z = 1)\ \Rightarrow\ (x = z\ \mathit{lub}\ x \vee z = 1)].$$

Wprowadźmy relację $\sim\ \subseteq At(L) \times At(L)$ zdefiniowaną następująco:

$$x \sim y\ \Leftrightarrow\ x = y \text{ lub } x \vee y = 1.$$

Relacja ta jest zwrotna i symetryczna, jest zatem tolerancją na $At(L)$. Zbiór bloków oznaczamy zwyczajowo przez $At(L)/_{\sim}$. Możemy teraz wysłowić ostatni aksjomat.

ix. Zbiór $At(L)/_{\sim}$ jest skończony.

Aksjomaty (i)-(ix) z filozoficznego punktu widzenia nie mają jednakowej "mocy". Postulaty (i)-(iii) (włącznie z implicite założonym ograniczenien kraty) przyjmujemy jako bazowe dla dalszych rozważań nad ontologią sytuacji. Dlatego też wszystkie kraty ograniczone, zupełne, atomowe i koatomowe będziemy w tej pracy nazywać *kratami sytuacji elementarnych.*

W dalszej części niniejszego rozdziału zbadamy własności $\mathbb{BW}$-krat, natomiast w rozdziałach następnych powrócimy do omawiania krat sytuacji elementarnych w pełnej ogólności, a także przedstawimy niektóre ich wzmocnienia.

2.2 Uwaga o aksjomatyce

Niech $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ będzie dowolną kratą sytuacji elementarnych. Elementy kraty $\mathcal{L}$ nazywamy *sytuacjami elementarnymi* lub krócej *e-sytuacjami*, element 0 – *e-sytuacją pustą*, 1 – *e-sytuacją niemożliwą*. Jeżeli $x \leqslant y$ będziemy mówili, że e-sytuacja x *zachodzi* w e-sytuacji y. Atomy kraty $\mathcal{L}$ czyli elementy zbioru $At(L)$ nazywamy *e-sytuacjami atomowymi*, zaś koatomy (elementy zbioru $Kt(L)$) – *światami możliwymi.* W każdej kracie sytuacji elementarnych wyróżniamy dokładnie jeden świat $w_{\mathcal{L}}$, który nazywamy *światem realnym.* Elementy zbioru $[w_{\mathcal{L}}) \setminus \{0\}$ nazywamy *faktami*.

Zauważmy, że aksjomat (viii) gwarantuje, że relacja $\sim$ jest przechodnia, zatem w istocie jest równoważnością na $At(L)$. Bloki $[x]_{\sim}$ są wobec tego klasami abstrakcji; będziemy je wtedy nazywać *wymiarami logicznymi*.

W końcu poprzedniej sekcji wspomnieliśmy, że te aksjomaty, które definiują kratę sytuacji elementarnych, uważamy za bazowe. Owe aksjomaty spróbujemy obecnie uzasadnić odwołując się do filozoficznych intuicji związanych z zamierzoną interpretacją krat sytuacji elementarnych.

(A) Sytuacje jako uporządkowany zbiór. Podstawowa zasada ontologii sytuacji stwierdza, iż zbiór sytuacji jest niepusty. Dalej, w zbiorze sytuacji wyróżnia się pewną relację częściowego porządku $\leqslant$, która odpowiada relacji *zachodzenia w*:

$$x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad \text{sytuacja } x \text{ zachodzi w sytuacji } y.$$

Inna fundamentalna zasada semantyki sytuacyjnej głosi, iż każde zdanie sensowne posiada swój korelat semantyczny, tj. pewną szczególną sytuację, do której się odnosi. Z zasady tej wynika zatem, że korelat semantyczny zdania $p \wedge q$ musi być czymś "większym" od korelatu zdania p, gdyż zdanie $p \wedge q$ mówi więcej niż zdanie p; jest zatem tak:

$$\text{korelat semantyczny zdania } p \leqslant \text{ korelat semantyczny zdania } p \wedge q.$$

(B) Ograniczenie zbioru sytuacji. Skoro tautologie i kontrtautologie KRZ są sensowne, mają swoje korelaty i są nimi odpowiednio: sytuacja pusta (zero) oraz sytuacja niemożliwa (jedynka).

(C) Koatomowość. Maksymalne elementy w zbiorze sytuacji możliwych odpowiadają w formalizmie ontologii sytuacji, światom możliwym: są to maksymalne fragmenty rzeczywistości, nie zawierające sprzeczności. Z tego powodu zakładamy, że w zbiorze sytuacji, każda sytuacja możliwa (tj. różna od jedynki) zachodzi w pewnym koatomie (świecie możliwym).

(D) Kresy. Jeśli dane są dwie sytuacje, postulujemy, że ich "połączenie" jest sytuacją i to najmniejszą, w której obie zachodzą. Analogicznie, żądamy, że istnieje sytuacja największa zachodząca w obydwóch naszych sytuacjach.

(E) Zupełność jest postulatem, by "połączenie" sytuacji istniało nawet dla nieskończonej liczby sytuacji.

(D) Atomowość. Istnienie sytuacji atomowych – najmniejszych i niepodzielnych fragmentów rzeczywistości – jest zapewne sprawą najmniej oczywistą i polemiczną. Zgadzamy się z Wolniewiczem, że nieatomowe kraty sytuacji elementarnych są do pomyślenia (por. [25], s. 85), jakkolwiek akceptujemy aksjomat (iii) z powodów semantycznych: żądamy by korelatami zdań prostych – atomów języka – były atomy kraty.

Przytoczona w sekcji 2.1 aksjomatyka jest pewnym uproszczeniem oryginalnej definicji $\mathbb{BW}$-krat zawartej w pracy [25]. Owego uproszczenia zdecydowaliśmy się dokonać, skoro niektóre aksjomaty przyjmowane przez Wolniewicza w omawianej pracy, okazały się zależne od pozostałych. Zanim przejdziemy do omawiania tych spostrzeżeń podkreślmy, że obie aksjomatyki są równoważne, tj. każda $\mathbb{BW}$-krata w sensie [25] jest $\mathbb{BW}$-kratą w sensie definicji 2.1 i na odwrót.

Aksjomat (vii) jest nieco słabszą wersją aksjomatu przyjmowanego przez Wolniewicza w [25] (por. aksjomat 9). Na gruncie pozostałych postulatów warunki te pozostają jednakowoż równoważne.

Zarówno w [25] jak i w [24] definicja kraty warunkowo dystrybutywnej jest następująca: krata $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 1 \rangle$ jest *warunkowo dystrybutywna* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x, y, z \in L$ spełnia warunki:

$$y \vee z \neq 1 \;\Rightarrow\; x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

$$x \vee y \neq 1 \;\&\; x \vee z \neq 1 \;\Rightarrow\; x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Łatwo zauważyć, że druga implikacja wynika z pierwszej (w istocie, obydwa warunki są równoważne – por. wniosek 2.9 niniejszej pracy). Istotnie, ustalmy dowolne $a, b, c \in L$ i załóżmy, że $a \vee b \neq 1$ oraz $a \vee c \neq 1$. Z pierwszej implikacji (która jest prawdziwa dla wszystkich elementów $\mathcal{L}$) dostajemy:

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) = a \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c).$$

W pracy [25] oprócz aksjomatów (i)-(ix) postuluje się, że krata $\mathcal{L}$ jest relatywnie komplementarna (por. wzór (1.13)). Wykażemy dwie rzeczy: po pierwsze, że relatywna komplementarność jest mocniejsza niż rozdzielność, a po drugie, że jest ona konsekwencją aksjomatów (i)-(ix).

Twierdzenie 2.1 *Jeżeli koatomowa krata jest relatywnie komplementarna to jest również rozdzielona.*

Dowód. Załóżmy, że $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 1 \rangle$ jest koatomową i relatywnie komplementarną kratą oraz przypuśćmy niewprost, że jest ona nierozdzielona, tj. istnieją $x, y \in L$ takie, że $y \nleqslant x$ oraz:

$$\forall_{w \in Kt(L)} (x \leqslant w \;\Rightarrow\; y \leqslant w). \tag{2.1}$$

Zauważmy, że:

$$x < x \vee y < 1. \tag{2.2}$$

Istotnie, nierówność pierwsza jest oczywista wobec tego, że $y \nleqslant x$. Stąd dostajemy $x \neq 1$ zatem istnieje $w \in Kt(L)$, takie, że $x \leqslant w$. Wówczas z (2.1) otrzymujemy $x \vee y \leqslant w$, więc ostatecznie $x \vee y < 1$.

Skoro $\mathcal{L}$ jest relatywnie komplementarna, istnieje $z \in L$ takie, że:

$$x = (x \vee y) \wedge z, \qquad 1 = (x \vee y) \vee z. \tag{2.3}$$

Wynika stąd, że $z \neq 1$, istnieje zatem $w \in Kt(L)$ takie, że $z \leqslant w$. Z warunków (2.2), (2.3) łatwo otrzymujemy $x \leqslant w$ i $y \nleqslant w$; sprzeczność z (2.1). ■

Drugi z zapowiedzianych wyżej wyników okazuje się prostym wnioskiem z poniższego twierdzenia 2.2. Aby go wysłowić przyjmijmy definicję (por. [24], s. 307): kratę atomową będziemy nazywać *skończenie atomistyczną*, gdy każdy jej element jest supremum skończonej liczby atomów.

Twierdzenie 2.2 *Kraty skończenie atomistyczne, rozdzielone i warunkowo dystrybutywne są relatywnie komplementarne.*

Dowód. Niech $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ będzie kratą skończenie atomistyczną, rozdzieloną i warunkowo dystrybutywną; ustalmy dowolne $x, y, z \in L$ takie, że $x \leqslant y \leqslant z$. Przypadki gdy $x = y$ lub $y = z$ są trywialne, załóżmy więc, że $x < y < z$. Rozważymy najpierw przypadek, gdy $z = 1$. Skoro krata $\mathcal{L}$ jest rozdzielona oraz $y \nleqslant x$, istnieje $w \in Kt(L)$ takie, że $x \leqslant w$ oraz $y \nleqslant w$. Ze skończonej atomistyczności istnieją skończone zbiory $X, Y, W \subseteq At(L)$ takie, że:

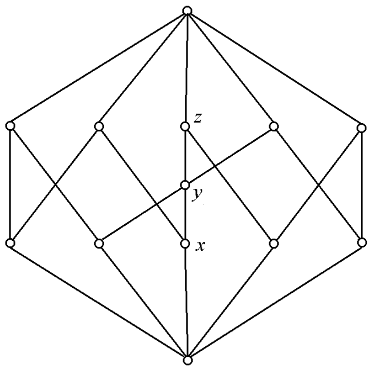
$$x = \sup X, \quad y = \sup Y, \quad w = \sup W.$$

Łatwo zauważyć, że $W \smallsetminus Y \neq \emptyset$. Istotnie, w przeciwnym razie byłoby $W \subseteq Y$, więc $w = \sup W \leqslant \sup Y = y$ skąd wynikałoby, że $y = w$ lub $y = 1$; sprzeczność. Kładąc $y' = x \vee \sup(W \smallsetminus Y)$, obliczamy bez trudu:
$y \wedge y' = y \wedge (x \vee \sup(W \smallsetminus Y))$
$= (y \wedge x) \vee (y \wedge \sup(W \smallsetminus Y))$ (warunkowa dystrybutywność)
$= x \vee (\sup Y \wedge \sup(W \smallsetminus Y))$
$= x \vee \sup\{a \wedge b : a \in Y \ \&\ b \in W \smallsetminus Y\}$ (sk. atomist., w. dystrybutywność)
$= x \vee 0 = 0,$
oraz
$y \vee y' = \sup Y \vee \sup(W \smallsetminus Y)) = \sup(Y \cup (W \smallsetminus Y)) = \sup(Y \cup W)$
$= \sup Y \vee \sup W = y \vee w$
$= 1$ (bo $y \nleqslant w$ i w jest koatomem)
$= z.$ (założenie dodatkowe)

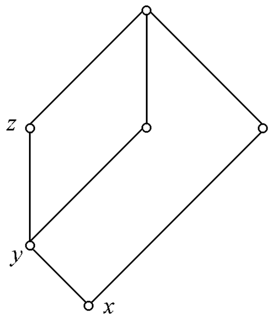
Rozważmy drugi przypadek, gdy $z \neq 1$. Kładziemy $y' = x \vee \sup(Z \smallsetminus Y)$, gdzie Z jest pewnym skończonym zbiorem atomów takim, że $z = \sup Z$ i obliczamy analogicznie jak wcześniej:
$y \wedge y' = y \wedge (x \vee \sup(Z \smallsetminus Y))$
$= (y \wedge x) \vee (y \wedge \sup(Z \smallsetminus Y))$ (warunkowa dystrybutywność)
$= x \vee (\sup Y \wedge \sup(Z \smallsetminus Y))$
$= x \vee \sup\{a \wedge b : a \in Y \ \&\ b \in Z - Y\}$ (sk. atomist., w. dystrybutywność)
$= x \vee 0 = 0,$
oraz

$$y \vee y' = \sup Y \vee \sup(Z \smallsetminus Y) = \sup(Y \cup (Z \smallsetminus Y)) = \sup Z = z. \quad \blacksquare$$

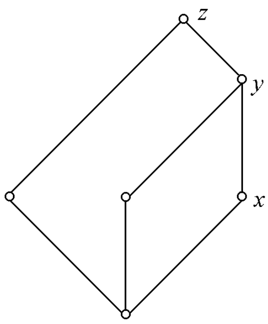
Uwaga 2.1 Wszystkie założenia w twierdzeniu 2.2 są konieczne. Istotnie, rysunek 3(a) ilustruje kratę skończenie atomistyczną i rozdzieloną, rysunek 3(b) – kratę rozdzieloną i warunkowo dystrybutywną, rysunek 3(c) – kratę skończenie atomistyczną i warunkowo dystrybutywną. Żadna jednak z tych krat nie jest relatywnie komplementarna (nie istnieje dopełnienie punktu y do x i z).



(a)



(b)



(c)

Rysunek 3

Wniosek 2.1 *$\mathbb{BW}$-kraty są relatywnie komplementarne.* ■

Wniosek 2.2 *Jeśli $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ jest skończenie atomistyczną i warunkowo dystrybutywną kratą, to dowolny właściwy ideał główny w $\mathcal{L}$ jest algebrą Boole'a.*

Dowód. Ustalmy $z \neq 1$. Wówczas ideał $(z]$ wraz z relacją $\leqslant$ obciętą do $(z]$ formuje kratę dystrybutywną z elementem najmniejszym 0 i największym z. Krata ta jest również komplementarna; faktu tego dowodzimy tak samo jak w przypadku drugim w twierdzeniu 2.2 (bez potrzeby korzystania z rozdzielności kraty). ■

2.3 Własności $\mathbb{BW}$-krat

Aksjomatyka $\mathbb{BW}$-krat jest niesprzeczna: najmniejszym modelem spełniającym aksjomaty (i)-(ix) jest dwuelementowa algebra Boole'a $\mathcal{B}_1$. Kratę tę nazwiemy $\mathbb{BW}$-kratą *niewłaściwą* i wyłączymy z dalszych badań. Wobec tego, wszędzie tam, gdzie będziemy pisać "dla dowolnej $\mathbb{BW}$-kraty $\mathcal{L}$" będziemy implicite zakładać, że $\mathcal{L} \neq \mathcal{B}_1$.

Ustalmy dowolną $\mathbb{BW}$-kratę $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$. Krata $\mathcal{L}$ wyznacza w jednoznaczny sposób swoje wymiary logiczne, które jako zbiory, są co najmniej dwuelementowe (konsekwencja aksjomatu (vii)). Powiemy, że $\mathbb{BW}$-krata $\mathcal{L}$ jest *n-wymiarowa*, wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jej wymiarów logicznych jest n-elementowy.

W niniejszej sekcji udowodnimy podstawowe twierdzenie charakteryzujące $\mathbb{BW}$-kraty, które to twierdzenie umożliwi pewną ich hierarchizację (sekcja 2.4). Wcześniej, odnotujmy następujący fakt:

Lemat 2.1 ([25], 1.13) *Dla dowolnego $A \subseteq At(L)$ takiego, że $\sup A \neq 1$ zachodzi $At(\sup A) = A$.*

Dowód. Załóżmy, że $x \in At(\sup A)$ i przypuśćmy, że $x \notin A$. Skoro $\sup A \neq 1$ to z faktu, że $\mathcal{L}$ ma skończenie wiele wymiarów logicznych, wynika, że zbiór A jest skończony; przyjmijmy: $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Z warunkowej dystrybutywności dostajemy wówczas sprzeczność:

$$x = x \wedge \sup A = x \wedge (a_1 \vee \ldots \vee a_k) = (x \wedge a_1) \vee \ldots \vee (x \wedge a_k) = 0 \vee \ldots \vee 0 = 0.$$

Inkluzja przeciwna jest oczywista. ■

Dla dowolnego zbioru U oraz dowolnej jego partycji $\mathcal{P}$ połóżmy:

$$BW(\mathcal{P}) = \{X \subseteq U : \forall_{P \in \mathcal{P}}\ |X \cap P| \leqslant 1\} \cup \{U\}.$$

Jeżeli $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ to dla uproszczenia będziemy pisać $BW(P_1, \ldots, P_n)$, zamiast $BW(\{P_1, \ldots, P_n\})$. Udowodnimy teraz zapowiedziane twierdzenie.

Twierdzenie 2.3 *Dla dowolnego zbioru U oraz dowolnej jego skończonej partycji $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$, o tej własności, że dla każdego $i = 1, \ldots, n$, zbiór P_i jest co najmniej dwuelementowy, zachodzi:*

i. *struktura $\mathcal{BW}(\mathcal{P}) = \langle BW(\mathcal{P}), \subseteq\rangle$ jest $\mathbb{BW}$-kratą,* *ii. jeśli $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ jest dowolną n-wymiarową $\mathbb{BW}$-kratą o wymiarach logicznych $D_1, \ldots, D_n$ takich, że $|D_i| = |P_i|$ to $\mathcal{L} \cong \mathcal{BW}(\mathcal{P})$.*

Dowód. Ad (i) Struktura $\mathcal{BW}(\mathcal{P})$ jest kratą ograniczoną: elementem najmniejszym jest $\emptyset$, największym zaś U. Infimum w $\mathcal{BW}(\mathcal{P})$ stanowi iloczyn mnogościowy, zaś supremum jest określone wzorem:

$$X \uplus Y = \begin{cases} X \cup Y & \text{jeśli } X \cup Y \in BW(\mathcal{P}) \\ U & \text{jeśli } X \cup Y \notin BW(\mathcal{P}) \end{cases} . \tag{2.4}$$

(1) Krata $\mathcal{BW}(\mathcal{P})$ jest zupełna. Istotnie, wzór (2.4) można uogólnić:

$$\biguplus \mathcal{R} = \begin{cases} \bigcup \mathcal{R} & \text{jeśli } \bigcup \mathcal{R} \in BW(\mathcal{P}) \\ U & \text{jeśli } \bigcup \mathcal{R} \notin BW(\mathcal{P}) \end{cases} ,$$

gdzie $\mathcal{R} \subseteq BW(\mathcal{P})$. Istotnie, jeśli $\bigcup \mathcal{R} \in BW(\mathcal{P})$ to z własności sumy mnogościowej $\bigcup \mathcal{R}$ jest najmniejszym ograniczeniem górnym (w sensie inkluzji) rodziny $\mathcal{R}$. W przeciwnym przypadku, tj. gdy $\bigcup \mathcal{R} \notin BW(\mathcal{P})$, rodzinę $\mathcal{R}$ można ograniczyć z góry (w $BW(\mathcal{P})$) jedynie elementem U. Jeśli chodzi o infimum, sprawa jest jasna jako, że iloczyn mnogościowy nie wyprowadza poza $BW(\mathcal{P})$.

(2) Koatomami kraty $\mathcal{BW}(\mathcal{P})$ są n-elementowe podzbiory zbioru U zawierające dokładnie po jednym punkcie z każdego P_i, czyli

$$Kt(BW(\mathcal{P})) = \{W \subseteq U : \forall_{1 \leqslant i \leqslant n} \ |W \cap P_i| = 1\}.$$

(3) Krata $\mathcal{BW}(\mathcal{P})$ jest atomowa:

$$At(BW(\mathcal{P})) = \{\{x\} : x \in U\}.$$

(4) Krata $\mathcal{BW}(\mathcal{P})$ jest rozdzielona (zbiorem koatomów). Istotnie, niech $X, Y \in BW(\mathcal{P})$ przy czym $Y \not\subseteq X$. Istnieje zatem $y \in Y \smallsetminus X$, przy czym $y \in P_i$ dla pewnego $1 \leqslant i \leqslant n$. Rozważmy przypadki: jeśli $X \cap P_i \neq \emptyset$, to biorąc dowolny koatom W taki, że $X \subseteq W$ (co jest możliwe, gdyż $X \neq U$) dostajemy $Y \not\subseteq W$. W przeciwnym przypadku, tj. gdy $X \cap P_i = \emptyset$, to wobec założenia, że $|P_i| \geqslant 2$ istnieje $x \in P_i$ przy czym $x \neq y$. Tym razem biorąc jakikolwiek koatom W zawierający zbiór $X \cup \{x\}$ dostajemy $Y \not\subseteq W$.

(5) Krata $\mathcal{BW}(\mathcal{P})$ jest atomistyczna. Istotnie, dla dowolnego $X \in BW(\mathcal{L})$ mamy bowiem:

$$X = \bigcup \{\{x\} : x \in X\} = \biguplus \{\{x\} : x \in X\}.$$

(6) Krata $\mathcal{BW}(\mathcal{P})$ jest warunkowo dystrybutywna. Istotnie, przyjmijmy, że $X, Y, Z \in BW(\mathcal{P})$ przy czym $Y \uplus Z \neq U$. Wówczas $Y \uplus Z = Y \cup Z$, a ponadto $(X \cap Y) \uplus (X \cap Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$, obliczamy zatem:

$$X \cap (Y \uplus Z) = X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) = (X \cap Y) \uplus (X \cap Z).$$

(7) Niech $X, Y \in BW(\mathcal{P}) \setminus \{\emptyset, U\}$ przy czym $X \uplus Y = U$. Wówczas $X \cup Y \notin BW(\mathcal{P})$ lub $X \cup Y = U$. Z obydwóch członów alternatywy wynika, że istnieją dwa różne punkty $x \in X$, $y \in Y$ takie, że $x, y \in P_i$ (dla pewnego $1 \leqslant i \leqslant n$). Oczywiście singletony $\{x\}$, $\{y\}$ są atomami, jednak $\{x\} \cup \{y\} \notin BW(\mathcal{P})$, zatem $\{x\} \uplus \{y\} = U$, co należało pokazać.

(8) Dla atomów dopełnienie jest przechodnie. Istotnie, ustalmy dowolne $\{x\}, \{y\}, \{z\} \in At(BW(\mathcal{P}))$ oraz załóżmy, że $\{x\} \uplus \{y\} = U$, $\{y\} \uplus \{z\} = U$ oraz $\{x\} \neq \{z\}$. Z powyższych założeń wynika, że $x \neq y$, $x \neq z$ i $y \neq z$. Przyjmijmy ponadto, że $x \in P_i$ (dla pewnego $1 \leqslant i \leqslant n$). Wówczas $y \in P_i$ i w konsekwencji $z \in P_i$, skąd wynika $\{x\} \uplus \{z\} = U$.

(9) Wymiarami logicznymi $\mathcal{BW}(\mathcal{P})$ są zbiory ilorazowe $P_i/_=$, zatem jest ich skończenie wiele.

Ad(ii) Z założeń punktu (ii) wynika, że istnieją bijekcje $b_i \colon D_i \to P_i$. Z rozłączności dziedzin i przeciwdziedzin wynika, że $b = b_1 \cup \ldots \cup b_n$ jest bijekcją z $At(L)$ na U. Jest oczywistym też, że funkcja $B \colon P(At(L)) \to P(U)$ dana wzorem:

$$B(X) = b[X] \qquad \text{dla } X \subseteq At(L),$$

jest bijekcją. Funkcją ustalającą szukany izomorfizm jest złożenie funkcji: $B \circ At \colon L \to P(A)$ (przy czym At w tym kontekście oznacza funkcję $At \colon L \to P(At(L))$ daną wzorem: $At(x) = \{a \in At(L) : a \leqslant x\}$).

Istotnie, zauważmy po pierwsze, że obydwie funkcje B oraz At są różnowartościowe (por. lemat 1.2), a zatem również ich złożenie posiada tę własność.

Po drugie, funkcja $B \circ At$ działa w $BW(\mathcal{P})$. Istotnie, jeśli $x \in L$ to dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$ zbiór $At(x)$ zawiera co najwyżej jeden element z D_i, zatem $b[At(x)]$ zawiera co najwyżej jeden element z P_i. Wobec dowolności i dostajemy stąd $b[At(x)] \in BW(\mathcal{P})$, czyli $B(At(x)) \in BW(\mathcal{P})$.

Po trzecie, $B \circ At$ jest surjekcją na $BW(\mathcal{P})$. Istotnie, przyjmijmy, że $Y \in BW(\mathcal{P})$. Przypadki gdy $Y = \emptyset$ lub $Y = U$ są trywialne, przyjmijmy zatem, że $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$, dla pewnego $1 \leqslant k \leqslant n$, przy czym $y_i \in P_i$.

Z własności funkcji b, dla $i = 1, \ldots, k$ istnieje $x_i \in D_i$ takie, że $b(x_i) = y_i$. Przyjmując wówczas $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, dostajemy:

$$B(X) = Y \quad \text{oraz} \quad \sup X \neq 1.$$

Z lematu 2.1 mamy wtedy $At(\sup X) = X$, co daje $B(At(\sup X)) = Y$.

Udowodniono zatem, że $B \circ At$ jest bijekcją. Zauważmy na koniec, że:

$$x \leqslant y \;\Leftrightarrow\; At(x) \subseteq At(y) \;\Leftrightarrow\; b[At(x)] \subseteq b[At(y)] \;\Leftrightarrow\; B(At(x)) \subseteq B(At(y)),$$

a zatem z lematu 1.2 wynika, że $B \circ At$ jest izomorfizmem. ■

Wyciągnijmy teraz kilka ważniejszych wniosków z udowodnionego twierdzenia 2.3.

Wniosek 2.3 ([25], 1.16) *Jeżeli $\mathcal{L}$ jest n-wymiarową $\mathbb{BW}$-kratą o wymiarach logicznych $D_1, \ldots, D_n$ to $\mathcal{L} \cong \mathcal{BW}(D_1, \ldots, D_n)$.* ■

Wniosek 2.4 ([25], 1.21) *Niech $\mathcal{L}$ będzie n-wymiarową $\mathbb{BW}$-kratą o wymiarach logicznych $D_1, \ldots, D_n$. Wówczas dla dowolnego $w \in Kt(L)$ i dowolnego D_i istnieje $a_i \in D_i$, takie, że $a_i \leqslant w$, a co więcej $w = a_1 \vee \ldots \vee a_n$.* ■

Wniosek 2.5 ([17]) *Dla dowolnej $\mathbb{BW}$-kraty $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ i dowolnych $x \in L \setminus \{1\}$, $w \in Kt(L)$, istnieje dokładnie jeden świat $w_x \in Kt(L)$ taki, że $x \leqslant w_x$ oraz dla dowolnego $y \in L$:*

$$y \leqslant w \;\&\; x \vee y \neq 1 \;\Rightarrow\; y \leqslant w_x. \tag{2.5}$$

Dowód. Niech $D_1, \ldots, D_n$ będą wymiarami logicznymi kraty $\mathcal{L}$. Jeśli x jest koatomem, to przyjmujemy $w_x = x$. W przeciwnym przypadku, wobec wniosku 2.4 możemy przyjąć, że:

$$x = a_1 \vee \ldots \vee a_k, \quad w = b_1 \vee \ldots \vee b_n, \quad k < n, \quad a_i, b_i \in D_i,$$

i położyć:

$$w_x = a_1 \vee \ldots \vee a_k \vee b_{k+1} \vee \ldots \vee b_n.$$

Jest oczywistym, że $x \leqslant w_x$. Dla weryfikacji warunku (2.5) ustalmy $y \leqslant w$ przy czym $x \vee y \neq 1$. Wówczas $y = b_{i_1} \vee \ldots \vee b_{i_l}$ dla pewnego $l \leqslant n$. Pokażemy, że $b_{i_j} \leqslant w_x$, dla dowolnego $j = 1, \ldots, l$. Istotnie, jeśli $k + 1 \leqslant i_j \leqslant n$ to oczywiście $b_{i_j} \in \{b_{k+1}, \ldots, b_n\}$, tj. $b_{i_j} \leqslant w_x$. Jeśli zaś $1 \leqslant i_j \leqslant k$ to $b_{i_j} \in \{a_1, \ldots, a_k\}$, w przeciwnym bowiem razie byłoby $b_{i_j} \vee a_m = 1$ dla pewnego $1 \leqslant m \leqslant k$, co dałoby w rezultacie $x \vee y = 1$. Ostatecznie mamy $y \leqslant w_x$, co należało pokazać.

Dla dowodu jedyności, przypuśćmy, że $w'_x \in Kt(L)$ przy czym $x \leqslant w'_x$ oraz

$$y \leqslant w \ \& \ x \vee y \neq 1 \ \Rightarrow \ y \leqslant w'_x, \tag{2.6}$$

dla dowolnego $y \in Y$. Pokażemy, że $w_x \leqslant w'_x$, skąd wyniknie natychmiast, że $w_x = w'_x$. Istotnie, dla każdego $1 \leqslant i \leqslant k$ mamy $a_i \leqslant x \leqslant w'_x$; ustalmy zatem $k + 1 \leqslant j \leqslant n$. Mamy oczywiście $b_j \leqslant w$ i ponadto $x \vee b_j \neq 1$. Gdyby bowiem $x \vee b_j = 1$ to z aksjomatu (vii) z definicji 2.1 istniałoby $1 \leqslant i \leqslant k$ takie, że $a_i \vee b_j = 1$, co jest niemożliwe skoro $a_i \in D_i$, $b_j \in D_j$ oraz $i < j$. Z (2.6) dostajemy zatem $b_j \leqslant w'_x$, co ostatecznie dowodzi, że $w_x \leqslant w'_x$. ■

Wniosek 2.6 *Jeśli $\mathcal{L}$ jest n-wymiarową $\mathbb{BW}$-kratą zaś $C \subseteq L$ łańcuchem maksymalnym, to $l(C) = n + 1$.* ■

Wniosek 2.7 *Jeśli $\mathcal{L}$ jest $\mathbb{BW}$-kratą to dowolny jej ideał właściwy jest skończoną algebrą Boole'a. Jeśli ponadto, $\mathcal{L}$ jest n-wymiarowa oraz $w \in Kt(L)$ to $(w] \cong \mathcal{B}_n$.* ■

Dodajmy na koniec sekcji, że związek $\mathbb{BW}$-krat z modularnością i dystrybutywnością (podstawowymi pojęciami teorii krat) jest bardzo nikły. Każda $\mathbb{BW}$-krata co najmniej dwuwymiarowa zawiera pentagon. Istotnie, jeśli $a, b \in D_1$ (wymiary logiczne są co najmniej dwuelementowe) oraz $c \in D_2$, to $\{0, a, b, b \vee c, 1\}$ formuje pentagon.

$\mathbb{BW}$-kraty jednowymiarowe są modularne; powód jest oczywisty: ich długość wynosi 2, pentagon nie może być zatem ich pdkratą. Spośród krat jednowymiarowych tylko jedna jest dystrybutywna: $\mathcal{B}_2$. Oczywiście niewłaściwa $\mathbb{BW}$-krata $\mathcal{B}_1$ jest również dystrybutywna.

2.4 Hierarchia $\mathbb{BW}$-krat

Jest sprawą oczywistą, że kolejność w jakiej wyliczone zostają wymiary logiczne $\mathbb{BW}$-kraty, nie wpływa na jej kształt. Ściślej, jeśli $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_n\}$

oraz $\mathcal{D}^p = \{D_{p(1)}, \ldots, D_{p(n)}\}$, gdzie p jest dowolną permutacją indeksów, to $\mathcal{BW}(\mathcal{D}) = \mathcal{BW}(\mathcal{D}^p)$. Możemy wobec tego zakładać, że wymiary logiczne danej $\mathbb{BW}$-kraty są uporządkowane według mocy, tzn. jeśli $i \leqslant j$ to $|D_i| \leqslant |D_j|$. Udowodnimy teraz jeszcze jeden wniosek z twierdzenia 2.3 podający charakterystykę izomorficzności krat.

Wniosek 2.8 *Niech* $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant_{\mathcal{L}}, 0_{\mathcal{L}}, 1_{\mathcal{L}} \rangle$ *oraz* $\mathcal{M} = \langle M, \leqslant_{\mathcal{M}}, 0_{\mathcal{M}}, 1_{\mathcal{M}} \rangle$ *będą* $\mathbb{BW}$*-kratami, o wymiarach logicznych* $D_1, \ldots, D_m$ *oraz* $E_1, \ldots, E_n$*, odpowiednio. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

i. $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$*,*

ii. $m = n$ *oraz* $|D_i| = |E_i|$*, dla* $i = 1, \ldots, n$*.*

Dowód. Implikacja (ii)$\Rightarrow$(i) jest wnioskiem z twierdzenia 2.3:

$$\mathcal{L} \cong \mathcal{BW}(E_1, \ldots, E_n) \cong \mathcal{M}.$$

(i)$\Rightarrow$(ii) Załóżmy, że $h \colon L \to M$ ustala izomorfizm krat $\mathcal{L}$ i $\mathcal{M}$ oraz przypuśćmy niewprost, że $m > n$. Dla każdego $1 \leqslant i \leqslant m$ wybierzmy dokładnie jeden element $x_i \in D_i$. Wówczas dla dowolnych $1 \leqslant i < j \leqslant m$ mamy $h(x_i) \neq h(x_j)$ (gdyż h jest różnowartościowa), zatem z zasady szufladkowej Dirichleta:

$$h(x_1 \vee \ldots \vee x_m) = h(x_1) \vee \ldots \vee h(x_m) = 1_{\mathcal{M}},$$

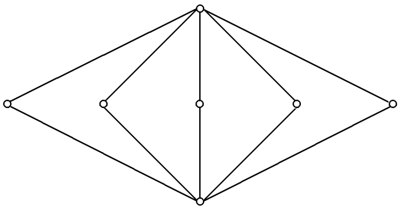
co jednakowoż jest niemożliwe, gdyż $x_1 \vee \ldots \vee x_m \neq 1_{\mathcal{L}}$. Założenie $m > n$ doprowadziło zatem do sprzeczności. Podobny argument wyklucza nierówność przeciwną, zatem $m = n$.

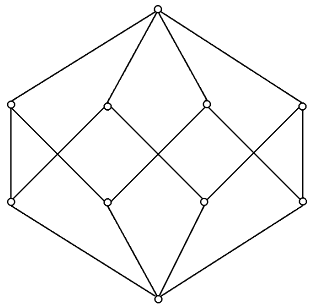
Funkcja h jako izomorfizm dwóch krat, atomy przeprowadza na atomy, przy czym jeśli dwa atomy kraty $\mathcal{L}$ należą do jednego wymiaru logicznego, to ich obrazy będą również w pewnym wymiarze logicznym kraty $\mathcal{M}$. Można przyjąć dla uproszczenia, że jeśli $x \in D_i$ to $h(x) \in E_i$. Wówczas łatwo sprawdzić, że obcięcie $h|_{D_i} \colon D_i \to E_i$ jest bijekcją, zatem $|D_i| = |E_i|$. ∎

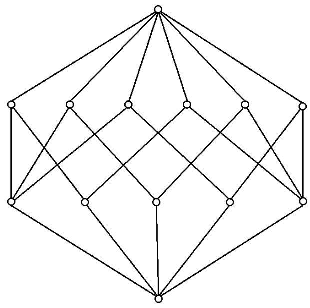
Wniosek 2.8 daje praktyczną charakteryzację $\mathbb{BW}$-krat: mając wiedzę na temat wymiarów logicznych dwóch $\mathbb{BW}$-krat wiemy czy są, czy też nie są izomorficzne. Sensu nabiera również pojęcie sygnatury $\mathbb{BW}$-kraty, które definiujemy poniżej.

Definicja 2.2 *Niech $\mathcal{L}$ będzie $\mathbb{BW}$-kratą o wymiarach logicznych $D_1, \ldots, D_n$. Sygnaturą* $\mathbb{BW}$-krat*y $\mathcal{L}$ nazywamy uporządkowaną n-kę liczb kardynalnych $(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$, gdzie $\kappa_i = |D_i|$ dla dowolnego $i = 1, \ldots, n$.*

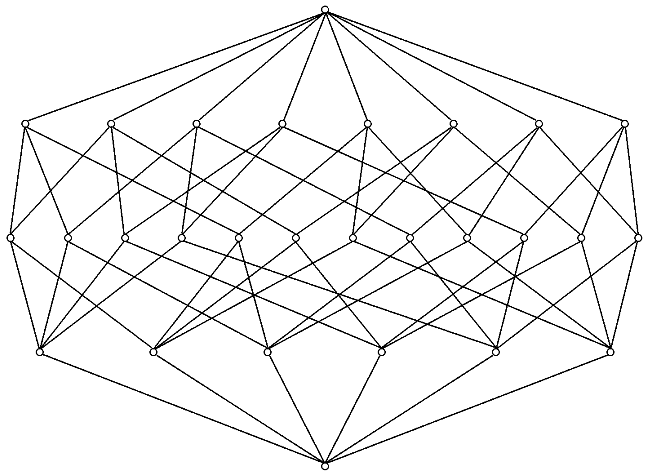
Jako ilustrację rozważmy $\mathbb{BW}$-kraty o "małych" sygnaturach.







(5) (2,2) (2,3)



(2,2,2)

Rysunek 4

Pojęcie sygnatury prowadzi w naturalny sposób do określenia częściowego porządku na klasie wszystkich $\mathbb{BW}$-krat. Jeśli $\mathcal{L}$ oraz $\mathcal{M}$ są $\mathbb{BW}$-kratami odpowiednio o sygnaturach $(\kappa_1, \ldots, \kappa_m)$ i $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ to definiujemy:

$$\mathcal{L} \trianglelefteq \mathcal{M} \;\Leftrightarrow\; (m \leqslant n \;\&\; \kappa_1 \leqslant \xi_{n-m+1} \;\&\; \kappa_2 \leqslant \xi_{n-m+2} \;\&\ldots\&\; \kappa_m \leqslant \xi_n).$$

Zaniedbując kwestię tworzywa z jakiego zbudowane są $\mathbb{BW}$-kraty, tj. zakładając, że działamy na reprezentantach $\mathbb{BW}$-krat, dowiedziemy łatwo, że relacja $\trianglelefteq$ jest częściowym porządkiem na klasie $\mathbb{BW}$-krat. Istotnie, zwrotność i przechodniość są oczywiste, zaś w celu uzasadnienia słabej antysymetrii, przypuśćmy, że $\mathcal{L} \trianglelefteq \mathcal{M}$ oraz $\mathcal{M} \trianglelefteq \mathcal{L}$. Wówczas łatwo stwierdzamy, że kraty te posiadają tyle samo wymiarów logicznych, przy czym moce odpowiadających sobie wymiarów (por. uwaga na początku sekcji) są tak samo liczne, zatem z wniosku 2.8 dostajemy $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$, co należało pokazać.

Relacja $\trianglelefteq$ jest również relacją kratową, czyli dla dowolnych dwóch $\mathbb{BW}$-krat $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ o sygnaturach $(\kappa_1, \ldots, \kappa_m)$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ istnieje górny oraz dolny kres zbioru $\{\mathcal{L}, \mathcal{M}\}$:

$$\mathcal{L} \vee \mathcal{M} = \mathcal{N}, \qquad \mathcal{L} \wedge \mathcal{M} = \mathcal{K},$$

gdzie $\mathcal{N}$ jest $\mathbb{BW}$-kratą o sygnaturze $(\max(\kappa_1, \xi_1), \ldots, \max(\kappa_r, \xi_r))$, przy czym $r = \max(m, n)$ (jeśli np. κ_i jest nieokreślone to przyjmjemy, że $\kappa_i = 0$). Analogicznie $\mathcal{K}$ jest $\mathbb{BW}$-kratą o sygnaturze $(\min(\kappa_1, \xi_1), \ldots, \min(\kappa_s, \xi_s))$, gdzie $s = \min(m, n)$. Dowód tego faktu jest oczywisty.

Przykładowo supremum $\mathbb{BW}$-krat o sygnaturach $(2, 2, 6, 8, 9)$, $(2, 5, 5)$ jest $\mathbb{BW}$-krata o sygnaturze $(2, 5, 6, 8, 9)$ zaś infimum – $\mathbb{BW}$-krata o sygnaturze $(2, 2, 5)$.

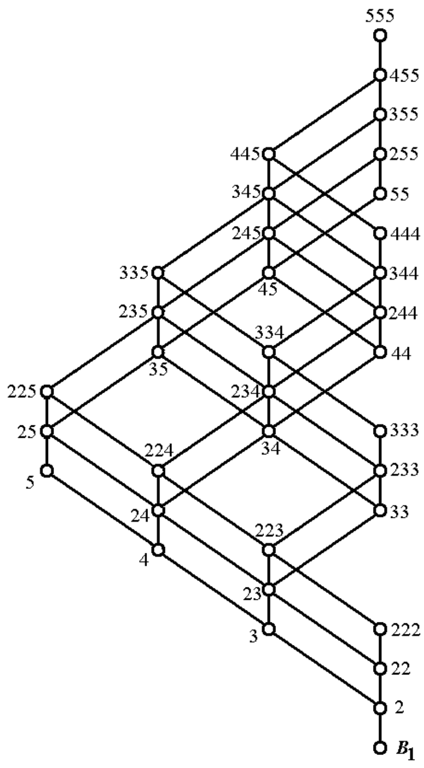
Twierdzenie 2.4 *Jeżeli $\mathcal{L} \trianglelefteq \mathcal{M}$ to $\mathcal{L}$ można zanurzyć homomorficznie w $\mathcal{M}$.*

Dowód. Niech $D_1, \ldots, D_m$ oraz $E_1, \ldots, E_n$ będą wymiarami logicznymi odpowiednio $\mathbb{BW}$-krat $\mathcal{L}$ i $\mathcal{M}$. Z założenia twierdzenia wynika, że $m \leqslant n$ oraz dla dowolnego $i = 1, \ldots, m$ istnieje injekcja $f_i \colon D_i \to E_{n-m+i}$. Łatwo zauważyć, że również $f = f_1 \cup \ldots \cup f_m$ jest injekcją. Szukanym zanurzeniem jest funkcja $h \colon L \to M$ dana wzorem:

$$h(x) = \sup\nolimits_{\leqslant_M} f[At_L(x)],$$

przy czym $At_L(x) = \{a \in At(L) : a \leqslant_L x\}$. Dowód tego spostrzeżenia jest elementarny, aczkolwiek nieco przydługi: wymaga rozważenia kilku przypadków, opiera się min. na faktach:

- $At(x \vee y) = At(x) \cup At(y)$, o ile $x \vee y \neq 1$ i $\mathcal{L}$ jest warunkowo dystrybutywna,
- $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$, o ile f jest różnowartościowa,
- $\sup A \cap B = \sup A \wedge \sup B$, o ile $A, B \subseteq At(L)$, $\sup A \neq 1$, $\sup B \neq 1$ oraz $\mathcal{L}$ jest warunkowo dystrybutywna. ■



Rysunek 5

Klasę wszystkich $\mathbb{BW}$-krat oznaczmy symbolem $\mathbb{BW}$. Bogactwo $\mathbb{BW}$-krat i wzajemne ich relacje częściowo oddaje rysunek 5. Przedstawia on (z dokładnością do izomorfizmu) fragment kraty $\langle \mathbb{BW}, \trianglelefteq \rangle$. Zaznaczone zostały tylko te $\mathbb{BW}$-kraty, które mają nie więcej niż trzy wymiary logiczne, przy czym każdy wymiar ma nie więcej niż pięć elementów. $\mathcal{B}_1$ oznacza dwuelementową algebrę Boole'a, zaś punkt oznaczony np. 235 jest $\mathbb{BW}$-kratą o sygnaturze $(2, 3, 5)$.

2.5 Zależności między aksjomatami

W sekcji tej przedyskutujemy związki występujące między aksjomatami definiującymi $\mathbb{BW}$-kratę, a także przedstawimy równoważne sformułowania (charakteryzacje) aksjomatów (iv) oraz (vi). Na potrzeby całej niniejszej sekcji ustalamy dowolną kratę $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$.

2.5.1 Zupełność

Aksjomaty (v) oraz (ix) implikują, że każdy łańcuch w $\mathcal{L}$ jest skończony. Istotnie, załóżmy, że $|At(L)/_{\sim}| = n$ dla pewnego n naturalnego. Gdyby $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots\}$ był przeliczalnie nieskończonym łańcuchem, przy czym

$$0 \prec c_1 \prec c_2 \prec c_3 \prec \ldots \quad ,$$

to z atomistyczności mielibyśmy:

$$1 \leqslant |At(c_1)| < |At(c_2)| < |At(c_3)| < \ldots \quad ,$$

a zatem $|At(c_{n+1})| \geqslant n+1$. Wówczas z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że istnieje blok relacji $\sim$, który zawiera dwa różne elementy z $At(c_{n+1})$, zatem korzystając jeszcze raz z atomistyczności (por. lemat 1.2) dostajemy sprzeczność:

$$1 > c_{n+1} = \sup At(c_{n+1}) = 1.$$

Aksjomaty (v) oraz (ix) implikują zatem, że krata $\mathcal{L}$ jest skończenie długa (długość dowolnego łańcucha jest nie większa niż $n+1$), jest zatem również zupełna.

2.5.2 Rozdzielność

Na początku przedstawimy trzy warunki równoważne z aksjomatem (iv). Ów w swoim sformułowaniu przypomina warunki topologiczne; pokażemy, że ma on też czysto algebraiczną charakteryzację, jako pojęcie dualne do pojęcia atomistyczności.

Twierdzenie 2.5 *W dowolnej koatomowej kracie* $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 1\rangle$ *następujące warunki są równoważne:*

i. $\mathcal{L}$ *jest rozdzielona zbiorem koatomów* $Kt(L)$*,*

ii. $\forall_{x,y\in L}[x \neq y \;\Rightarrow\; \exists_{w\in Kt(L)}((x \leqslant w \;\&\; y \nleqslant w)$ *lub* $(x \nleqslant w \;\&\; y \leqslant w))]$*,*

iii. $\forall_{x\in L}\ x = \inf Kt(x)$*,*

iv. $\forall_{x\in L}\ \exists_{X\subseteq Kt(L)}\ x = \inf X$*.*

Dowód. Implikacja (i)⇒(ii) jest oczywista.

(ii)⇒(iii) Ustalmy dowolny $x \in L$. Zauważmy po pierwsze, że $x \leqslant w$, dla dowolnego $w \in Kt(x)$. Po drugie, niech y będzie ograniczeniem dolnym zbioru $Kt(x)$, przy czym przypuśćmy niewprost, że $y \nleqslant x$. Wówczas $x < x \vee y$, zatem istnieje $w \in Kt(L)$ takie, że $x \leqslant w$ i $x \vee y \nleqslant w$. Z tego pierwszego wynika, że $w \in Kt(x)$, a skoro y jest ograniczeniem zbioru $Kt(x)$, również $y \leqslant w$, co daje $x \vee y \leqslant w$; sprzeczność. Hipoteza okazała się fałszywa, zatem $y \leqslant x$, skąd ostatecznie wynika, że $x = \inf Kt(x)$.

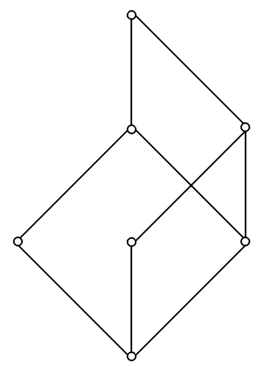
(iii)⇒(i) Ustalmy dowolne $x, y \in L$ i załóżmy, że $y \nleqslant x$. Z założenia dostajemy $\inf Kt(y) \nleqslant \inf Kt(x)$, a zatem $Kt(x) \nsubseteq Kt(y)$, co należało pokazać.

Równoważności (iii)⇔(iv) dowodzimy w analogiczny sposób jak równoważności (i)⇔(ii) w lemacie 1.2. ■

Aksjomat (iv) jest niezależny od pozostałych aksjomatów definiujących $\mathbb{BW}$-kratę. Istotnie, rozważmy kratę, którą przedstawia rysunek 6. Łatwo sprawdzić, iż krata ta nie jest rozdzielona, a jednocześnie spełnia pozostałe aksjomaty. Warto dodać, że aksjomat (viii) – z którym bywają najczęściej kłopoty – zostaje tu spełniony trywialnie.

2.5.3 Atomistyczność

Mimo iż – jak wynika z twierdzenia 2.5 – atomistyczność jest pojęciem dualnym do rozdzieloności, sprawa ma się tutaj inaczej niż w sekcji wcześniejszej. Odnotujmy mianowicie twierdzenie:



Rysunek 6

Twierdzenie 2.6 *Aksjomaty* (iv) *oraz* (vii) *implikują* (v).

Dowód. Załóżmy, że krata $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ spełnia (iv), (vii) oraz przypuśćmy, że istnieje $x \in L$ taki, że $\sup At(x) < x$. Wówczas z (iv) istnieje $w \in Kt(L)$ taki, że $\sup At(x) \leqslant w$ oraz $x \not\leqslant w$. Skoro w jest koatomem, to $x \vee w = 1$, zatem z aksjomatu (vii) istnieje $a \in At(x)$, $b \in At(w)$, że $a \vee b = 1$. Z drugiej jednak stony mamy $a \leqslant \sup At(x) \leqslant w$, zatem $a \vee b \leqslant w$; sprzeczność. ■

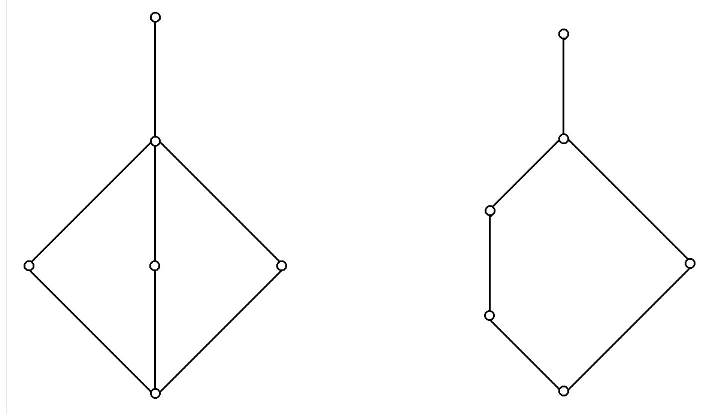
Uwaga 2.2 *Założenia twierdzenia* 2.6 *są istotne.*

Dowód. $\mathcal{N}_5$ oraz krata, którą przedstawia rysunek 3(b) stanowią odpowiednie kontrprzykłady. ■

2.5.4 Warunkowa dystrybutywność

W sekcji niniejszej najpierw scharakteryzujemy pojęcie warunkowej dystrybutywności, a na koniec udowodnimy, że aksjomat (vi) jest niezależny od pozostałych postulatów definiujących $\mathbb{BW}$-kraty.

J. Hawranek oraz J. Zygmunt w pracy [10] udowodnili twierdzenie charakteryzujące kraty warunkowo dystrybutywne na modłę twierdzenia Birkhoffa. Rozważmy kraty $\mathcal{M}_3^{\oplus}$, $\mathcal{N}_5^{\oplus}$, które przedstawia rysunek 7 i odnotujmy twierdzenie.



$\mathcal{M}_3^{\oplus}$ $\mathcal{N}_5^{\oplus}$

Rysunek 7

Twierdzenie 2.7 ([10], 2.5) *Niech* $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 1\rangle$ *będzie dowolną kratą z jedynką. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

i. $\mathcal{L}$ *jest warunkowo dystrybutywna,*

ii. krat $\mathcal{M}_3^{\oplus}$, $\mathcal{N}_5^{\oplus}$ *nie da się zanurzyć homomorficznie w* $\mathcal{L}$,

iii. każdy właściwy ideał główny w $\mathcal{L}$ *jest dystrybutywny.*

Dowód. (i)⇒(ii) Łatwo zauważyć, że kraty $\mathcal{M}_3^{\oplus}$, $\mathcal{N}_5^{\oplus}$ nie są warunkowo dystrybutywne, zatem nie mogą być zanurzone w $\mathcal{L}$.

(ii)⇒(iii) Przez kontrapozycję, przypuśćmy, że istnieje właściwy ideał główny I nie będący dystrybutywną podkratą kraty $\mathcal{L}$. Wówczas z twierdzenia Birkhoffa 1.1 wynika, że któraś z krat $\mathcal{M}_3$ lub $\mathcal{N}_5$ może być zanurzona w ideale I, zatem któraś z krat $\mathcal{M}_3^{\oplus}$ lub $\mathcal{N}_5^{\oplus}$ może być zanurzona w $\mathcal{L}$.

(iii)⇒(i) Ustalmy dowolne $x, y, z \in L$ oraz załóżmy, że $y \vee z \neq 1$. Wówczas ideał $(y \vee z]$ jest dystrybutywną podkratą kraty $\mathcal{L}$ oraz $x \wedge (y \vee z), y, z \in (y \vee z]$. Obliczamy zatem korzystając z dystrybutywności w $(y \vee z]$:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge (y \vee z)) \wedge (y \vee z) = (x \wedge (y \vee z) \wedge y) \vee (x \wedge (y \vee z) \wedge z) = (x \wedge y) \vee (x \vee z).$$

Tym samym, twierdzenie zostało udowodnione. ■

Wyciągnijmy wnioski z udowodnionego twierdzenia.

Wniosek 2.9 ([10], [12]) *Dla dowolnej kraty $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 1\rangle$ następujące warunki są równoważne:*

i. *$\mathcal{L}$ jest warunkowo dystrybutywna,*

ii. $\forall_{x,y,z\in L}(x \vee y \neq 1 \ \&\ x \vee z \neq 1 \ \Rightarrow\ (x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge z))$.

Dowód. Implikacja (i)⇒(ii) była już uzasadniona w sekcji 2.2. Dla dowodu implikacji przeciwnej przypuśćmy, że $\mathcal{L}$ nie jest warunkowo dystrybutywna. Wówczas z twierdzenia 2.7 jedną z krat, $\mathcal{M}_3^{\oplus}$ lub $\mathcal{N}_5^{\oplus}$, można homomorficznie zanurzyć w $\mathcal{L}$. Skoro jednak kraty te nie spełniają warunku (ii) to $\mathcal{L}$ również go nie spełnia. ■

Niech $\mathcal{K} = \{\mathcal{L}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ będzie dowolną rodziną krat, przy czym κ jest pewną liczbą kardynalną oraz $\mathcal{L}_\alpha = \langle L_\alpha, \leqslant_\alpha\rangle$. Powiemy, że $\mathcal{K}$ jest *kleista*, gdy dla $\alpha, \beta < \kappa$ spełnione jest:

$$L_\alpha \cap L_\beta \text{ jest niepustym ideałem w } \mathcal{L}_\alpha \text{ i w } \mathcal{L}_\beta,$$

$$\leqslant_\alpha |_{L_\alpha\cap L_\beta \times L_\alpha \cap L_\beta} = \leqslant_\beta |_{L_\alpha\cap L_\beta \times L_\alpha \cap L_\beta}.$$

Jeśli rodzina $\mathcal{K}$ posiada powyższe własności, definiujemy strukturę $\bigoplus \mathcal{K} = \langle K, \leqslant_K, 1_K\rangle$ gdzie:

$$1_K \notin \bigcup\{L_\alpha : \alpha < \kappa\},$$

$$K = \bigcup\{L_\alpha : \alpha < \kappa\} \cup \{1_K\},$$

$$\leqslant_K = \bigcup\{\leqslant_\alpha : \alpha < \kappa\} \cup \{(x, 1_K) : x \in K\}.$$

Łatwo zobaczyć, że $\bigoplus \mathcal{K}$ jest kratą; nazywamy ją *$\mathcal{K}$-sumą*.

Wniosek 2.10

i. *Każdą warunkowo dystrybutywną kratę $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 1\rangle$ da się przedstawić jako $\mathcal{K}$-sumę dystrybutywnych krat, gdzie*

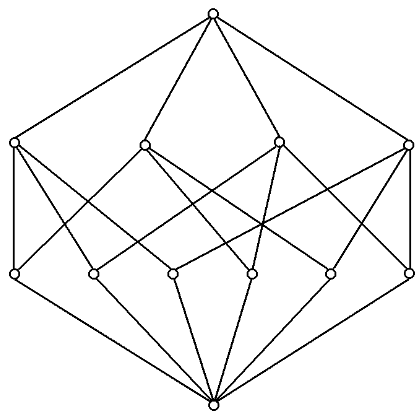
$$\mathcal{K} = \{\langle I, \leqslant |_{I\times I}\rangle : I \textit{ jest właściwym ideałem głównym w } \mathcal{L}\}.$$

ii. *Dla dowolnej kleistej rodziny $\mathcal{K}$ krat dystrybutywnych, $\bigoplus \mathcal{K}$ jest kratą warunkowo dystrybutywną.* ■

Przechodzimy z kolei do kwestii niezależności aksjomatu (vi). Rozważmy kratę zilustrowaną przez rysunek 8 oraz odnotujmy twierdzenie.

Twierdzenie 2.8 *Aksjomat* (vi) *jest niezależny od pozostałych warunków definiujących* $\mathbb{BW}$*-kraty.*

Dowód. Krata z rysunku 8 zawiera jako swoją podkratę kratę $\mathcal{M}_3^{\oplus}$, zatem z twierdzenia 2.7 wynika, że nie jest ona warunkowo dystrybutywna. Weryfikacja pozostałych aksjomatów, zwłaszcza (vii), polega na cierpliwej analizie naszej kraty. ■



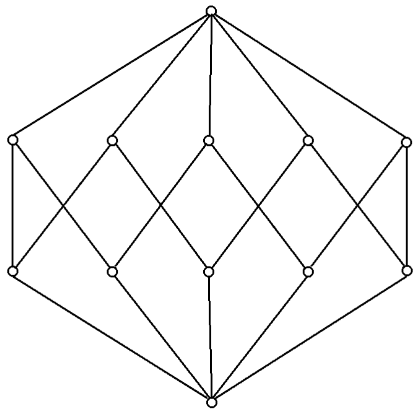
Rysunek 8

2.5.5 Aksjomat (vii)

Aksjomat (vii) jest niezależny od reszty aksjomatów. Aby się o tym przekonać wystarczy rozważyć trójwymiarową algebrę Boole'a $\mathcal{B}_3$. Sprawdzenie nie nastręcza trudności.

2.5.6 Aksjomat (viii)

Rozważmy kratę, którą obrazuje rysunek 9 i odnotujmy twierdzenie.



Rysunek 9

Twierdzenie 2.9 *Aksjomat* (viii) *jest niezależny od pozostałych warunków definiujących* $\mathbb{BW}$*-kraty.*

Dowód. Łatwo zauważyć, że krata z rysunku 9 nie spełnia aksjomatu (viii). Jedynie aksjomat (vii) wymaga skrupulatnego sprawdzenia; pozostałe są spełnione trywialnie. $\blacksquare$

2.5.7 Aksjomat (ix)

Rozważmy partycję $\mathcal{P} = \{\{i, -i\} \subseteq \mathbb{Z} : i \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}\}$ i zastosujmy do niej operację $BW(\cdot)$ opisaną w sekcji 2.3. Łatwo sprawdzić, że krata $\langle BW(\mathcal{P}), \subseteq\rangle$ spełnia wszystkie aksjomaty oprócz (ix).

Rozdział 3

Uogólnienia $\mathbb{BW}$-krat

W rozdziale tym omówimy pewne słabsze od $\mathbb{BW}$-krat struktury, które wiążą się z odrzuceniem aksjomatu o przechodnim dopełnieniu dla atomów tj. aksjomatu (viii) z definicji 2.1. Istnieją mianowicie dość poważne – jak sądzimy – problemy z filozoficzną wykładnią tego warunku. W ramach przykładu ilustrującego ową trudność, rozważmy następujące zdania pewnego podjęzyka języka polskiego, w którym są one zdaniami prostymi:

Sławek czyta Hłaskę, Sławek pływa żabką, Sławek siedzi.

Nasze standardowe rozumienie zdań języka polskiego podpowiada, iż zdanie pierwsze wyklucza drugie, drugie wyklucza trzecie, zaś pierwsze i trzecie nie wykluczają się. Zastanowimy się czy takie rozumienie uda nam się sformalizować na gruncie ontologii sytuacji. Po pierwsze, załóżmy więc, że powyższe zdania mają swoje korelaty semantyczne w pewnej kracie sytuacji elementarnych $\mathcal{L}$, odpowiednio a, b, c, przy czym, skoro nasze zdania są proste, to a, b, c są atomami w $\mathcal{L}$. Dalej, jeśli zdanie *Sławek czyta Hłaskę* wyklucza zdanie *Sławek pływa żabką* to nie może być tak, że korelaty semantyczne tych zdań zachodzą w pewnym świecie w, czyli nie jest tak, że $a \leqslant w$ i $b \leqslant w$, dla pewnego $w \in Kt(L)$. Stąd mamy $a \vee b = 1$. Podobnie argumentując dostajemy $b \vee c = 1$. Gdyby krata $\mathcal{L}$ spełniała aksjomat (viii) byłoby również $a \vee c = 1$, co nie da się pogodzić z naszym standardowym rozumieniem zdań języka polskiego. Nie istnieje zatem adekwatna formalizacja wyrażająca nasze standardowe rozumienie, na gruncie krat sytuacji elementarnych spełniających aksjomat (viii). Inaczej mówiąc, aby sformalizować standardowe rozumienie rozważanych zdań, należy wyjść poza kraty spełniające aksjomat (viii). Z tego powodu, można postawić tezę, iż aksjomat (viii) jest nieadekwatny, gdyż prowadzi do nadmiernych restykcji semantycznych.

W rozdziale niniejszym omówimy operację $BW(\cdot)$ w szerszym kontekście, aplikować ją będziemy mianowicie do dowolnych rodzin zbiorów (pokryć), a nie tylko do rodzin zbiorów rozłącznych (partycji), jak w rozdziale wcześniejszym. Okaże się, że w rezultacie dostaniemy kraty sytuacji elementarnych, w których aksjomat (viii) nie będzie spełniony, przy czym większość ważnych własności $\mathbb{BW}$-krat zostanie zachowane.

3.1 Operacja $BW(\cdot)$

W 2.3 operacja $BW(\cdot)$ została wprowadzona jako funkcja przekształcająca dowolną partycję (jakiegokolwiek zbioru) w kratę. Udowodniliśmy twierdzenie 2.3, mówiące, że jeśli partycja $\mathcal{P}$ jest skończona oraz jej elementy są co najmniej dwuelementowe, to zbiór $BW(\mathcal{P})$ z relacją inkluzji formuje $\mathbb{BW}$-kratę. W sekcji niniejszej zastanowimy się nad tym, do jakich struktur prowadzi operacja $BW(\cdot)$ jeśli o $\mathcal{P}$ założymy, że jest jedynie pokryciem pewnego zbioru.

Niech U będzie dowolnym zbiorem niepustym oraz $\mathcal{C} \subseteq P(U)$ dowolnym jego pokryciem. Łatwo zauważyć, że zbiór $BW(\mathcal{C})$ wraz z relacją inkluzji formuje kratę (nie wnikamy na razie w kwestię jej dodatkowych własności). Operacja $BW(\cdot)$ jako operacja przekształcająca partycję w kratę ma własność bycia różnowartościową, tzn. dla dowolnych partycji $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ jeżeli $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$ to $BW(\mathcal{P}_1) \neq BW(\mathcal{P}_2)$. Tej własności $BW(\cdot)$ nie posiada jako funkcja przekształcająca pokrycia. Istotnie, jeśli $U = \{x, y, z\}$ oraz $\mathcal{C}_1 = \{\{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}\}$, $\mathcal{C}_2 = \{U\}$ to mamy wówczas $BW(\mathcal{C}_1) = BW(\mathcal{C}_2) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, U\}$, a stąd $\mathcal{BW}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{BW}(\mathcal{C}_2)$.

W dalszej części sformułujemy pewne warunki takie, że obcięcie $BW(\cdot)$ do klasy pokryć spełniających te warunki okaże się być operacją różnowartościową. Wcześniej jednak zastanowimy się nad związkiem zachodzącym między pojęciem pokrycia zbioru a pojęciem tolerancji na tym zbiorze.

Niech U będzie dowolnym niepustym zbiorem, zaś Θ – tolerancją na U. Tolerancja wyznacza jednoznacznie zbiór bloków $U/_{\Theta}$, przy czym suma mnogościowa bloków pokrywa zbiór U. Każda tolerancja wyznacza zatem pewne pokrycie, mianowicie $U/_{\Theta}$.

Łatwo zauważyć, że również z każdym pokryciem $\mathcal{C}$ związana jest pewna tolerancja $\Theta_{\mathcal{C}}$ dana wzorem, dla $x, y \in U$:

$$x\Theta_{\mathcal{C}}y \;\Leftrightarrow\; \exists_{C\in\mathcal{C}}\; x, y \in C.$$

Relacja $\Theta_{\mathcal{C}}$ jako tolerancja wyznacza zbiór bloków $U/_{\Theta_{\mathcal{C}}}$. Powstaje zatem w naturalny sposób pytanie o to, jakie własności musi spełniać pokrycie $\mathcal{C}$ aby zachodziła równość: $\mathcal{C} = U/_{\Theta_{\mathcal{C}}}$.

Dla dowolnego $x \in U$ i dowolnego pokrycia $\mathcal{C} \subseteq P(U)$ przyjmijmy, że $\mathcal{C}_x = \{C \in \mathcal{C} : x \in C\}$ i rozważmy warunki:

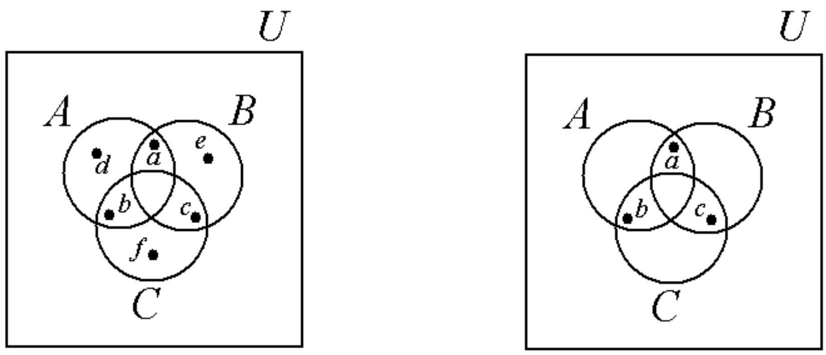
$$\forall_{C\in\mathcal{C}}\; \forall_{x\in U\setminus C}\; C \not\subseteq \bigcup \mathcal{C}_x, \tag{3.1}$$

$$\forall_{X\subseteq U}((\forall_{x,y\in X}\; \exists_{C\in\mathcal{C}}\; x, y \in C) \Rightarrow (\exists_{D\in\mathcal{C}}\; X \subseteq D)). \tag{3.2}$$

Zauważmy najpierw, że warunek (3.1) implikuje, że elementy pokrycia $\mathcal{C}$ są maksymalne w sensie inkluzji, tzn.

$$\forall_{C,D\in\mathcal{C}}(C \subseteq D \;\Rightarrow\; C = D).$$

Ponadto, obydwa warunki (3.1) i (3.2) są niezależne; poniższe diagramy prezentują odpowiednie kontrprzykłady



Rysunek 10

Lemat 3.1 *Dla dowolnego zbioru $U \neq \emptyset$ i dowolnego pokrycia $\mathcal{C} \subseteq P(U)$ spełniającego warunki* (3.1) *i* (3.2)*, prawdziwa jest równość $\mathcal{C} = U/_{\Theta_{\mathcal{C}}}$.*

Dowód. Pokażemy po pierwsze, że (3.1) implikuje inkluzję $\mathcal{C} \subseteq U/_{\Theta_{\mathcal{C}}}$. Istotnie, załóżmy, że $C \in \mathcal{C}$. Wtedy $x\Theta_{\mathcal{C}}y$ dla dowolnych $x, y \in C$, zatem istnieje pewien blok B relacji $\Theta_{\mathcal{C}}$, w którym mieści się C. Gdyby jednak C było właściwie zawarte w B, tj. gdyby $x \in B \smallsetminus C$ (dla pewnego x), wtedy dla dowolnego $y \in C$ istniałby zbiór $C_y \in \mathcal{C}$ taki, że $x, y \in C_y$. Wówczas dochodzimy jednak do sprzeczności z postulatem (3.1):

$$C \subseteq \bigcup\{C_y : y \in C\} \subseteq \bigcup \mathcal{C}_x.$$

Przypuszczenie $B \smallsetminus C \neq \emptyset$ doprowadziło do sprzeczności, zatem $B = C$, a zatem $C \in U/_{\Theta_{\mathcal{C}}}$.

Po drugie, uzasadnimy, że z (3.2) wynika inkluzja przeciwna $U/_{\Theta_{\mathcal{C}}} \subseteq \mathcal{C}$. Niech mianowicie B będzie dowolnym blokiem relacji $\Theta_{\mathcal{C}}$. Z definicji, każde dwa elementy bloku B są ze sobą w relacji $\Theta_{\mathcal{C}}$, zatem z (3.2) wnioskujemy, że istnieje pewne $C \in \mathcal{C}$ takie, że $B \subseteq C$. Skoro jednak B jest blokiem to dostajemy $B = C$ (por. (1.2)), a stąd $B \in \mathcal{C}$, co należało okazać. ■

Lemat 3.2 *Dla dowolnego zbioru $U \neq \emptyset$ i dowolnego pokrycia $\mathcal{C} \subseteq U$ jeśli $\mathcal{C} = U/_{\Theta_{\mathcal{C}}}$ to pokrycie $\mathcal{C}$ spełnia warunki* (3.1) *i* (3.2)*.*

Dowód. Po pierwsze pokażemy, że inkluzja $\mathcal{C} \subseteq U/_{\Theta_{\mathcal{C}}}$ implikuje (3.1). W tym celu załóżmy, że $C \in \mathcal{C}$ oraz $x \in U \smallsetminus C$ oraz przypuśćmy niewprost, że $C \subseteq \bigcup \mathcal{C}_x$. Z hipotezy wnioskujemy, że każde dwa elementy zbioru $C \cup \{x\}$ są ze sobą w relacji $\Theta_{\mathcal{C}}$. Z drugiej jednak strony, z założonej inkluzji wynika, że C jest blokiem relacji $\Theta_{\mathcal{C}}$, a to jest niemożliwe, gdyż $x \notin C$.

Po drugie, załóżmy, że $U/_{\Theta_{\mathcal{C}}} \subseteq \mathcal{C}$, a ponadto ustalmy dowolne $X \subseteq U$, o tej własności, że każde dwa jego elementy są ze sobą w relacji $\Theta_{\mathcal{C}}$. Wówczas istnieje blok B relacji $\Theta_{\mathcal{C}}$ taki, że $X \subseteq B$, a z założonej inkluzji wynika, że $B \in \mathcal{C}$; pokrycie $\mathcal{C}$ spełnia zatem warunek (3.2). ■

Twierdzenie 3.1 *Niech U będzie dowolnym zbiorem zawierającym co najmniej trzy elemeny, zaś $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ jego dowolnymi pokryciami spełniającymi postulaty* (3.1) *oraz* (3.2)*. Wówczas jeśli $\mathcal{C} \neq \mathcal{D}$ to $BW(\mathcal{C}) \neq BW(\mathcal{D})$.*

Dowód. Bez straty ogólności przyjmijmy, że istnieje C takie, że $C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D}$ oraz przypuśćmy niewprost, że $BW(\mathcal{C}) = BW(\mathcal{D})$. Rozważymy dwa przypadki i pokażemy, że odydwa prowadzą do sprzeczności.

(1) Jeśli istnieją $x, y \in C$ takie, że $x \neq y$ oraz $\{x, y\} \in BW(\mathcal{D})$ to z hipotezy również $\{x, y\} \in BW(\mathcal{C})$, a stąd $\{x, y\} = U$; sprzeczność.

(2) Przeciwny przypadek zapiszmy jak następuje:

$$\forall_{x,y \in C}(x \neq y \;\Rightarrow\; \{x, y\} \notin BW(\mathcal{D})).$$

Z definicji $BW(\mathcal{D})$ dostajemy:

$$\forall_{x,y \in C}\ \exists_{D \in \mathcal{D}}\ x, y \in D,$$

zatem z warunku (3.2) istnieje $E \in \mathcal{D}$ takie, że $C \subseteq E$. Zauważmy ponadto, że $C \neq E$ (w przeciwnym przypadku byłoby $C \in \mathcal{D}$; sprzeczność), zatem istnieje $e \in E \setminus C$. Z warunku (3.1) mamy wówczas $C \nsubseteq \bigcup \mathcal{C}_e$ gdzie $\mathcal{C}_e = \{X \in \mathcal{C} : e \in X\}$; słowami: zbioru $C \cup \{e\}$ nie da się pokryć zbiorami z $\mathcal{C}_e$. Istnieje zatem $c \in C$ takie, że $c \notin X$, dla dowolnego $X \in \mathcal{C}_e$. Stąd $\{c, e\} \in BW(\mathcal{C})$, zatem z hipotezy również $\{c, e\} \in BW(\mathcal{D})$. Skoro jednak $c, e \in E \in \mathcal{D}$ to musi być $\{c, e\} = U$ co jest sprzecznością. ■

Uwaga 3.1 *Założenie* $|U| \geqslant 3$ *w powyższym twierdzeniu jest konieczne.*

Dowód. Niech $U = \{x, y\}$ oraz $\mathcal{C} = \{\{x\}, \{y\}\}$, $\mathcal{D} = \{U\}$. Obydwa pokrycia spełniają warunki (3.1), (3.2), a jednak $BW(\mathcal{C}) = BW(\mathcal{D})$. Dla pozostałych przypadków, tj. $|U| = 1$ lub $|U| = 0$ twierdzenie jest trywialnie prawdziwe.■

3.2 $\mathbb{T}$-kraty

Definicja 3.1 $\mathbb{T}$-kratą *nazywamy każdą kratę spełniającą aksjomaty* (i)-(iii), (v)-(vii) *oraz* (ix) *z definicji* 2.1.

$\mathbb{T}$-kraty są zatem z definicji kratami ogólniejszymi niż $\mathbb{BW}$-kraty. O ile $\mathbb{BW}$-kraty są związane z pewną partycją albo z pewną relacją równoważności (por. twierdzenie 2.3), tak $\mathbb{T}$-kraty – jak pokażemy – są związane z pewnym pokryciem oraz pewną tolerancją. Termin "$\mathbb{T}$-krata" został właśnie przez nas wybrany, by podkreślał zależność omawianych tu krat od relacji tolerujących. Odnotujmy najpierw analogon twierdzenia 2.3 dla $\mathbb{T}$-krat.

Twierdzenie 3.2

i. *Jeżeli $\mathcal{C}$ jest skończoną rodziną zbiorów co najmniej dwuelementowych, to zbiór $BW(\mathcal{C})$ formuje $\mathbb{T}$-kratę (ze względu na inkluzję).*

ii. *Dla dowolnej $\mathbb{T}$-kraty $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ istnieje rodzina zbiorów $\mathcal{C}$ taka, że $\mathcal{L} \cong \mathcal{BW}(\mathcal{C})$.*

Dowód. Punkt (i) dowodzimy tak samo jak punkt (i) w twierdzeniu 2.3. Dla dowodu punktu (ii) zauważmy, że relacja $\sim\ \subseteq At(L) \times At(L)$ dana wzorem:

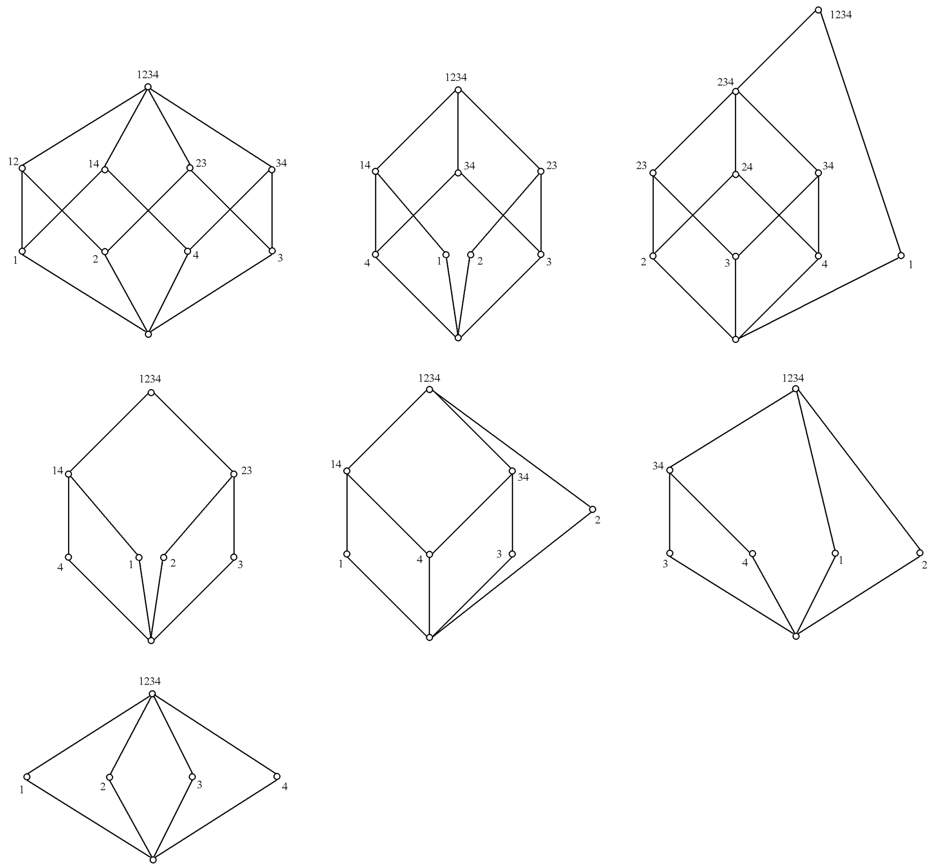
$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; x = y \text{ lub } x \vee y = 1$$

jest tolerancją na zbiorze $At(L)$. Niech $\mathcal{C}$ będzie zbiorem wszystkich bloków relacji $\sim$. Funkcją ustalającą szukany izomorfizm jest funkcja $At\colon L \to P(At(L))$. W analogiczny sposób jak w twierdzeniu 2.3 (i) pokazujemy, że At działa w $\mathcal{C}$ oraz, że jest bijekcją zachowującą porządek, co z lematu 1.1 pozwala stwierdzić, że At jest izomorfizmem krat. ■

Wobec powyższego twierdzenia, klasę wszystkich $\mathbb{T}$-krat można scharakteryzować (z dokładnością do izomorfizmu) jako klasę krat generowanych przez operację $BW(\cdot)$, aplikowanej do dowolnej skończonej rodziny zbiorów co najmniej dwuelementowych. Co więcej, wobec twierdzenia 3.1 można ograniczyć się do rodzin spełniających warunki (3.1) i (3.2) omawianych w poprzedniej sekcji.

Klasa wszystkich $\mathbb{T}$-krat jest znacznie obszerniejsza od klasy $\mathbb{BW}$-krat. Dla przykładu, jeżeli uniwersum (na którym zadane są pokrycia) jest czteroelementowe $U = \{1, 2, 3, 4\}$ mamy siedem nieizomorficznych $\mathbb{T}$-krat, które ilustruje rysunek 11. Kraty te wygenerowane zostały z odpowiednich pokryć, które przedstawia z kolei rysunek 12.

Spośród wyrysowanych powyżej krat tylko dwie są rozdzielone i jednocześnie są to $\mathbb{BW}$-kraty (pierwsza i ostatnia). Zważając na to, że aksjomat (viii) z definicji 2.1 jest niezależny od pozostałych warunków definiujących $\mathbb{BW}$-kratę (por. sekcja 2.5.6), istnieją $\mathbb{T}$-kraty rozdzielone i nie spełniające aksjomatu (viii). Istotnie, taką kratę przedstawia rysunek 9, (por. sekcja 2.5.6).



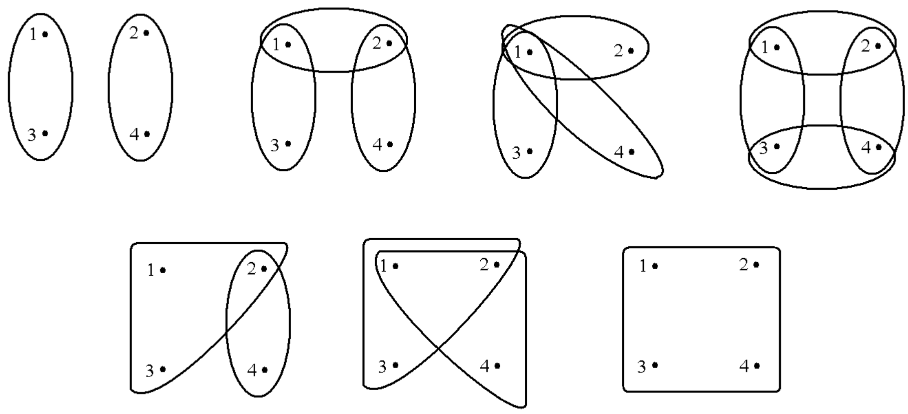
Rysunek 11

Z punktu widzenia następnych rozdziałów, istotne są kraty rozdzielone, tzn. kraty spełniające warunek (iv) w definicji 2.1. Dlatego też poświęcimy teraz nieco uwagi $\mathbb{T}$-kratom rozdzielonym. Niech $\mathcal{C}$ będzie skończoną rodziną zbiorów conajmniej dwuelementowych, dla której spełnione są warunki (3.1) i (3.2) oraz przyjmijmy, że $U = \bigcup \mathcal{C}$. Rozważmy następujący warunek:

$$D \nsubseteq C \;\Rightarrow\; \exists_{W \in Kt(BW(\mathcal{C}))}(C \subseteq W \;\&\; D \nsubseteq W), \tag{3.3}$$

dla $C, D \in BW(\mathcal{C})$. Oczywiście warunek powyższy jest wprost aksjomatem (iv) sformułowanym dla kraty $\mathcal{BW}(\mathcal{C})$. Należy mimo to zauważyć, że jakkolwiek jest on również warunkiem na pokrycie $\mathcal{C}$, ponieważ definicja zbioru

$BW(\mathcal{C})$ nie zależy od (iv). Dla sprawiedliwości trzeba jednak przyznać, że (3.3) nie daje żadnej intuicyjnej wskazówki jak szukać pokryć, które generują rozdzielone $\mathbb{T}$-kraty. Znalezienie eleganckiego warunku, który by implikował (a jeszcze lepiej, by był równoważny) rozdzieloność $\mathbb{T}$-kraty, pozostaje zatem kwestią otwartą.



Rysunek 12

3.3 Rozdzielone kraty ilorazowe

Bogusław Wolniewicz w [24] rozważając półkraty górne (tj. zbiory częściowo uporządkowane z określoną operacją supremum), przedstawia prostą metodę usuwania elementów nierozdzielalnych, przez ich "zlepianie". W niniejszej sekcji skorzystamy z wyników Wolniewicza oraz nieco je rozszerzymy. Przede wszystkim operację "zlepiania" przeprowadzimy na gruncie krat sytuacji elementarnych. Po drugie, przedyskutujemy kwestię zachowywania przez tę operację własności $\mathbb{T}$-krat.

Niech $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ będzie dowolną kratą sytuacji elementarnych. Dla dowolnych $x, y \in L$ połóżmy:

$$x \approx y \;\Leftrightarrow\; \forall_{w \in Kt(L)}(x \leqslant w \;\Leftrightarrow\; y \leqslant w).$$

Jeśli $x \approx y$ to powiemy, że *e-sytuacje x, y są nierozdzielalne* (*zbiorem światów możliwych w kracie $\mathcal{L}$*). Łatwo zauważyć, że relacja $\approx$ jest równoważnością na L, rozbija zatem uniwersum kraty $\mathcal{L}$ na klasy abstrakcji:

$$L/_{\approx} = \{[x] : x \in L\}.$$

Podstawowe własności relacji $\approx$ ujmujemy w poniższym lemacie.

Lemat 3.3 *Dla dowolnych $x, y, z, t \in L$ zachodzi co następuje:*

i. $x \approx y \;\Rightarrow\; x \approx x \vee y$,

ii. $x \approx y \;\&\; z \approx t \;\Rightarrow\; x \vee z \approx y \vee t$,

iii. $x \wedge y \approx x \;\Rightarrow\; x \vee y \approx y$,

iv. $x \leqslant y \leqslant z \;\&\; x \approx z \;\Rightarrow\; x \approx y \approx z$,

v. $\sup[x] \in [x]$,

vi. $[1] = \{1\}$.

Dowód. Ustalmy dowolne $w \in Kt(L)$. Ad (i) Jeśli $x \leqslant w$ to z założenia $x \approx y$ wynika, że $y \leqslant w$, zatem $x \vee y \leqslant w$. Z drugiej strony, jeśli $x \vee y \leqslant w$ to oczywiście $x \leqslant w$.

Ad (ii) Na podstawie założeń dostajemy następujący ciąg równoważności:

$$x \vee z \leqslant w \;\Leftrightarrow\; (x \leqslant w \;\&\; z \leqslant w) \;\Leftrightarrow\; (y \leqslant w \;\&\; t \leqslant w) \;\Leftrightarrow\; y \vee t \leqslant w.$$

Ad (iii) Jeśli $y \leqslant w$ to oczywiście $x \wedge y \leqslant w$, zatem z założenia również $x \leqslant w$, skąd dostajemy: $x \vee y \leqslant w$. Z drugiej strony, jeśli $x \vee y \leqslant w$ to oczywiście $y \leqslant w$.

Ad (iv) Pokażemy jedynie, że $x \approx y$; w tym celu załóżmy, że $x \leqslant w$. Wówczas $z \leqslant w$ (bo $x \approx z$), a dalej $y \leqslant w$. Z drugiej strony, jeśli $y \leqslant w$ to oczywiście $x \leqslant w$.

Ad (v) Niech $x \leqslant w$. Wówczas dla dowolnego $y \in [x]$ mamy $y \leqslant w$, zatem z własności supremum dostajemy: $\sup[x] \leqslant w$, co należało pokazać. Z drugiej strony, jeśli $\sup[x] \leqslant w$ to oczywiście $x \leqslant w$.

Dodajmy, że w powyższym rozumowaniu korzystaliśmy z założenia, że istnieje supremum zbioru $[x]$, a zatem z zupełności kraty sytuacji elementarych $\mathcal{L}$.

Ad (vi) Załóżmy przez kontrapozycję, że $x \neq 1$. Z koatomowości, istnieje wówczas $w_0 \in Kt(L)$ takie, że $x \leqslant w_0$. Skoro jednak $1 \nleqslant w_0$, dostajemy $x \not\approx 1$. ■

Uwaga 3.2 *Relacja $\approx$ nie jest kongruencją kratową, w szególności nie jest spełniony warunek:*

$$x \approx y \;\&\; z \approx t \;\Rightarrow\; x \wedge z \approx y \wedge t.$$

Dowód. Jako kontrprzykład wystarczy rozważyć drugą (licząc od lewego górnego rogu) kratę z rysunku 11. Mamy tam $1 \approx 14$ chociaż, $1 \wedge 4 \not\approx 14 \wedge 4$. ■

Wobec punktu (v) powyższego lematu w dowolnym $A \in L/_\approx$ istnieje element największy, który oznaczamy 1_A. Zdefiniujmy relację $\leqslant \subseteq L/_\approx \times L/_\approx$ jak następuje:

$$A \leqslant B \;\Leftrightarrow\; 1_A \leqslant 1_B,$$

dla $A, B \in L/_\approx$. Jest sprawą oczywistą, że relacja zdefiniowana powyżej jest relacją częściowego porządku. Nieco mniej trywialnym jest fakt, że jest ona relacją kratową. Aby to pokazać, odnotujmy jeszcze jeden lemat.

Lemat 3.4 *Dla dowolnych $A, B \in L/_\approx$ oraz $a \in A$, $b \in B$ zachodzi:*

$$a \leqslant b \;\Rightarrow\; 1_A \leqslant 1_B.$$

Dowód. Pokażemy implikację:

$$a \leqslant 1_B \;\Rightarrow\; 1_A \leqslant 1_B,$$

skąd wyniknie już łatwo teza naszego lematu. Załóżmy mianowicie, że $a \leqslant 1_B$. Wówczas $a \leqslant 1_A \wedge 1_B \leqslant 1_A$, zatem z lematu 3.3(iv) dostajemy $1_A \wedge 1_B \approx 1_A$. Dalej, z lematu 3.3(iii) wynika, że $1_A \vee 1_B \approx 1_B$, a skoro 1_B jest największy w B to $1_A \vee 1_B = 1_B$, czyli $1_A \leqslant 1_B$. ■

Jako prostą konsekwencję lematu 3.4 dostajemy wniosek:

Wniosek 3.1 *Dla dowolnych $a, b \in L$ zachodzi:*

$$a \leqslant b \;\Rightarrow\; [a] \leqslant [b].$$

Dowód. Przyjmijmy, że $a \in A$, $b \in B$, dla pewnych $A, B \in L/_\approx$. Skoro $a \leqslant b$, to z lematu 3.4 mamy $1_A \leqslant 1_B$, a zatem:

$$[a] = [1_A] \leqslant [1_B] = [b]. \quad ■$$

Określimy teraz kresy w zbiorze $L/_{\approx}$; dla $A, B \in L/_{\approx}$ kładziemy:

$$A \vee B = [1_A \vee 1_B], \tag{3.4}$$
$$A \wedge B = [1_A \wedge 1_B]. \tag{3.5}$$

Pokażemy najpierw, że operacja $\vee$ zdefiniowana wzorem (3.4) odpowiada operacji supremum w $L/_{\approx}$. Po pierwsze, z wniosku 3.1 dostajemy: $[1_A] \leqslant [1_A \vee 1_B]$, tj. $A \leqslant A \vee B$. Po drugie, ustalmy dowolne $C \in L/_{\approx}$ i przypuśćmy, że $A \leqslant C$ oraz $B \leqslant C$. Wówczas $[1_A] \leqslant [1_C]$, $[1_B] \leqslant [1_C]$, zatem z definicji relacji $\leqslant$ mamy $1_A \leqslant 1_C$, $1_B \leqslant 1_C$, tj. $1_A \vee 1_B \leqslant 1_C$. Stąd i z wniosku 3.1 dostajemy:

$$A \vee B = [1_A \vee 1_B] \leqslant [1_C] = C.$$

Obecnie w podobny sposób udowodnimy, że wzór (3.5) definiuje infimum. Po pierwsze, $1_A \wedge 1_B \leqslant 1_A$, zatem z wniosku 3.1 mamy $[1_A \wedge 1_B] \leqslant [1_A]$. Po drugie, jeśli $[1_C] \leqslant [1_A]$ oraz $[1_C] \leqslant [1_B]$, to $1_C \leqslant 1_A \wedge 1_B$, zatem z wniosku 3.1: $[1_C] \leqslant [1_A \wedge 1_B]$, co należało pokazać.

Wobec powyższych uwag odnotujmy twierdzenie.

Twierdzenie 3.3 *Krata $\mathcal{L}/_{\approx} = \langle L/_{\approx}, \leqslant, [1] \rangle$ jest rozdzielona.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że jeśli $w \in Kt(L)$ to $[w] \in Kt(L/_{\approx})$ przy czym $1_{[w]} = w$. Ustalmy dowolne $A, B \in L/_{\approx}$ i załóżmy, że $B \nleqslant A$. Wówczas $1_B \nleqslant 1_A$, a ponadto z własności klas abstrakcji mamy $A \cap B = \emptyset$, skąd wynika, że $1_A \not\approx 1_B$. Istnieje wobec tego $w \in Kt(L)$ taki, że $1_A \leqslant w$ oraz $1_B \nleqslant w$, więc ostatecznie $[1_A] \leqslant [w]$ i $[1_B] \nleqslant [w]$ co należało pokazać. ■

Powiemy, że *operacja $/_{\approx}$ zachowuje własność ϕ* wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi implikacja:

krata $\mathcal{L}$ spełnia własność ϕ $\Rightarrow$ krata $\mathcal{L}/_{\approx}$ spełnia własność ϕ.

Zastanowimy się obecnie, które z własności $\mathbb{T}$-krat są zachowywane przez operację $/_{\approx}$. Wobec uwagi 3.2 można się spodziewać, że – niezbyt ściśle mówiąc – te własności, które związane są z kresem dolnym kraty $\mathcal{L}$, nie będą zachowywane. Wyniki na ten temat ujmuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.4 *Operacja $/_{\approx}$ nie zachowuje:*

i. warunkowej dystrybutywności,

ii. własności bycia atomem,

iii. atomistyczności,

iv. atomowości,

v. aksjomatu (vii).

Dowód. Ad (i) Pokrycie $\{\{a,b,c\},\{c,d,e\},\{e,f\},\{f,a\}\}$ generuje $\mathbb{T}$-kratę z rysunku 13(a), która po ilorazowaniu daje kratę z rysunku 13(b) (punkt np. *be* oznacza $[be]$). Łatwo zauważyć, że zawiera ona jako swoją podkratę kratę $\mathcal{M}_3^{\oplus}$ zatem z twierdzenia 2.7 nie jest warunkowo dystrybutywna.

Ad (ii) Element c w kracie 13(a) jest atomem, ale $[c]$ w kracie ilorazowej 13(b) już atomem nie jest.

Ad (iii) Ta sama krata 13(a) jest atomistyczna, ale 13(b) już nie jest (z powodu punktu cf).

Ad (iv) Karta $\mathcal{L}$ którą teraz zajmiemy się jest atomowa, jednakowoż $\mathcal{L}/_{\approx}$ okaże się nie mieć tej własności. Krata $\mathcal{L}/_{\approx}$ musi być więc nieskończona (skoro każda skończona krata jest atomowa), a zatem tym bardziej $\mathcal{L}$ musi być nieskończona. Uniwersum kraty $\mathcal{L}$ to rodzina zbiorów liczb porządkowych, dana następująco:

$$L = \{\emptyset\} \cup \{\{n\} : n \in \omega\} \cup \{\omega \setminus \{0,\dots,n\} : n \in \omega\} \cup \{\omega\} \cup \{\omega \cup \{\omega\}\} \cup$$

$$\cup \{\omega \cup \{\omega+1\}\} \cup \{(\omega \cup \{\omega + (n+2)\}) \setminus \{0,\dots,n\} : n \in \omega\} \cup \{\omega + \omega\}.$$

W ten sposób zdefinowany zbiór L wraz z relacją inkluzji formuje kratę atomową, przy czym $At(L) = \{\{n\} : n \in \omega\}$. Fragment tej kraty przedstawia rysunek 14.

Nie jest trudno zauważyć, że relacja $\approx$ zlepia następujące pary elementów:

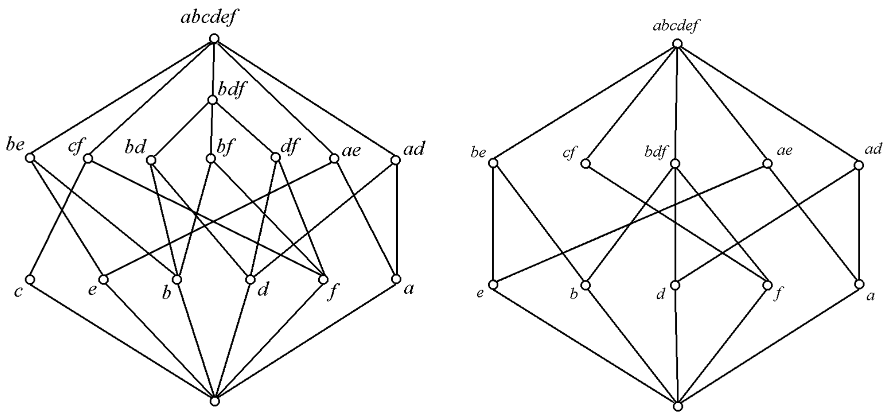
$$\{0\} \approx \omega,$$
$$\{1\} \approx \omega \setminus \{0\},$$
$$\{2\} \approx \omega \setminus \{0,1\},$$
$$\{3\} \approx \omega \setminus \{0,1,2\};$$

ogólnie:

$$\{n+1\} \approx \omega \setminus \{0,\dots,n\},$$

dla $n \in \omega$. Pozostałe elementy są rozdzielone. Krata ilorazowa przedstawia się zatem tak, jak widać na rysunku 15. Jest oczywiste, że nie posiada ona żadnego atomu.

Ad (v) Rozważmy jeszcze raz kratę z rysunku 13(a). Spełnia ona oczywiście aksjomat (vii), natomiast krata 13(b) nie spełnia go dla pary punktów: cf i bdf. ■



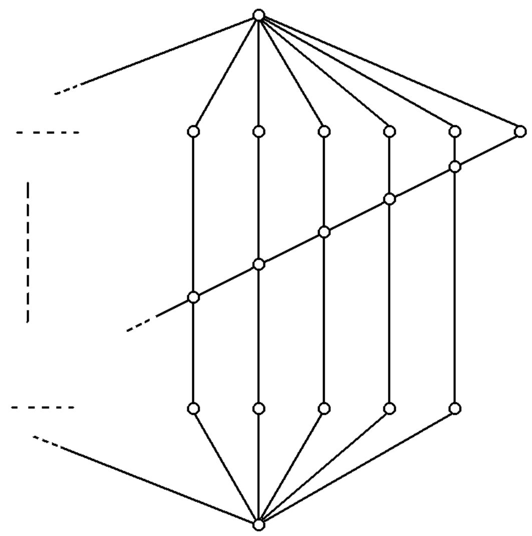
(a) (b)

Rysunek 13

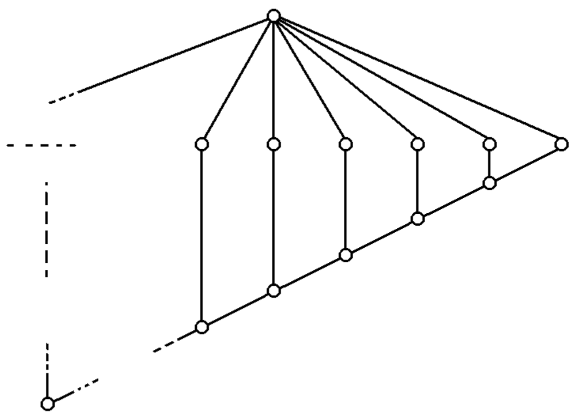
Fakt, że operacja $/_{\approx}$ gubi ważne własności $\mathbb{T}$-krat, świadczy raczej, że nie jest ona adekwatnym narzędziem w badaniu krat sytuacji elementarnych. Powstaje jednakowoż ciekawy problem, polegający na wskazaniu (możliwie największej) takiej klasy pokryć $\mathbb{C}$, by operacja:

$$\mathbb{C} \ni \mathcal{C} \mapsto \mathcal{BW}(\mathcal{C}) \mapsto \mathcal{BW}(\mathcal{C})/_{\approx}$$

generowała $\mathbb{T}$-kraty rozdzielone, a więc by operacja $/_{\approx}$ zachowywała aksjomaty (i), (iii), (v), (vi), (vii).



Rysunek 14



Rysunek 15

Rozdział 4

Rozdzielone kraty sytuacji elementarnych. Semantyka

4.1 Relacja weryfikowania, własności podstawowe

Rozważmy język zdaniowy $\mathcal{S} = \langle S, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg \rangle$ oraz ustalmy dowolną kratę sytuacji elementarnych $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1 \rangle$. Zakładamy, że zdania proste (zmienne) mają swoje korelaty semantyczne w dziedzinie e-sytuacji atomowych; niech $s\colon V \rightarrow At(L)$ będzie właśnie takim wartościowaniem. Przyjmijmy następującą definicję dla $x \in L$, $\alpha, \beta \in S$:

$$x \Vdash_s p \;\Leftrightarrow\; s(p) \leqslant x, \quad \text{dla} \;\; p \in V \tag{4.1}$$

$$x \Vdash_s \alpha \wedge \beta \;\Leftrightarrow\; x \Vdash_s \alpha \;\&\; x \Vdash_s \beta, \tag{4.2}$$

$$x \Vdash_s \neg\alpha \;\Leftrightarrow\; \forall_{w \in Kt(x)}\, w \nVdash_s \alpha, \tag{4.3}$$

$$x \Vdash_s \alpha \vee \beta \;\Leftrightarrow\; \forall_{w \in Kt(x)}(w \Vdash_s \alpha \text{ lub } w \Vdash_s \beta), \tag{4.4}$$

$$x \Vdash_s \alpha \rightarrow \beta \;\Leftrightarrow\; \forall_{w \in Kt(x)}(w \Vdash_s \alpha \;\Rightarrow\; w \Vdash_s \beta). \tag{4.5}$$

Wartościowanie s nazywamy *wartościowaniem sytuacyjnym* dla odróżnienia od np. wartościowania zero-jedynkowego. Będziemy opuszczali przymiotnik "sytuacyjny" zawsze tam, gdy z kontekstu wiadomo będzie o jakie wartościowanie chodzi. Relację $\Vdash_s$ nazywamy *relacją weryfikowania* (*wyznaczoną przez wartościowanie* s), jeśli zaś $x \Vdash_s \alpha$, mówimy, że *e-sytuacja* x *weryfikuje* (*w sensie wartościowania* s) *zdanie* α.

Niech $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ oraz $s\colon V \to At(L)$ będą ustalone. W rozdziale niniejszym będziemy badali ogólne własności relacji weryfikowania, tzn. takie które nie zależą od parametru s. Dla zyskania przejrzystości będziemy zatem opuszczać indeks relacji $\Vdash_s$ pisząc $x \Vdash \alpha$, zamiast $x \Vdash_s \alpha$.

Odnotujmy podstawowe własności relacji weryfikowania.

Lemat 4.1 *Dla dowolnych* $x, y \in L$, $\alpha, \beta \in S$ *zachodzi:*

i. $x \Vdash \alpha \vee \beta \;\Leftrightarrow\; x \Vdash \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$,

ii. $x \Vdash \alpha \to \beta \;\Leftrightarrow\; x \Vdash \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$,

iii. $x \Vdash \alpha \;\&\; x \leqslant y \;\Rightarrow\; y \Vdash \alpha$,

iv. $x \Vdash \alpha \;\&\; y \Vdash \beta \;\Rightarrow\; x \vee y \Vdash \alpha \wedge \beta$,

v. $1 \Vdash \alpha$,

vi. $x \Vdash \alpha \wedge \neg\alpha \;\Leftrightarrow\; x = 1$,

vii. $x \Vdash \alpha \;\Rightarrow\; x \Vdash \neg\neg\alpha$,

viii. $x \neq 1 \;\&\; x \Vdash \neg\neg\alpha \;\Rightarrow\; \exists_{w \in Kt(x)}\, w \Vdash \alpha$,

ix. $\forall_{w \in Kt(x)}(w \Vdash \alpha \;\Rightarrow\; w \Vdash \beta) \;\Rightarrow\; x \Vdash \alpha \to \beta$,

x. $x \Vdash \neg\alpha \;\Leftrightarrow\; \forall_{z \in L}(z \Vdash \alpha \;\Rightarrow\; x \vee z = 1)$.

Dowód. Ze względu na podstawowy charakter niniejszego lematu, dowód przeprowadzimy skrupulatnie.

Ad (i) Korzystając z definicji relacji $\Vdash$ obliczamy jak następuje:

$$x \Vdash \neg(\neg\alpha\wedge\neg\beta) \;\Leftrightarrow\; \forall_{w \in Kt(x)}\, w \nVdash \neg\alpha\wedge\neg\beta \;\Leftrightarrow\; \forall_{w \in Kt(x)}(w \nVdash \neg\alpha \text{ lub } w \nVdash \neg\beta)$$

$$\Leftrightarrow\; \forall_{w \in Kt(x)}(w \Vdash \alpha \text{ lub } w \Vdash \beta) \;\Leftrightarrow\; x \Vdash \alpha \vee \beta.$$

Ad (ii) Podobnie jak powyżej mamy:

$$x \Vdash \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \;\Leftrightarrow\; \forall_{w \in Kt(x)}\, w \nVdash \alpha \wedge \neg\beta \;\Leftrightarrow\; \forall_{w \in Kt(x)}(w \nVdash \alpha \text{ lub } w \nVdash \neg\beta)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall_{w \in Kt(x)}(w \Vdash \alpha \ \Rightarrow \ w \Vdash \beta) \quad \Leftrightarrow \quad x \Vdash \alpha \to \beta.$$

Ad (iii) Niech $x \Vdash \alpha$ oraz $x \leqslant y$; wówczas oczywiście $Kt(y) \subseteq Kt(x)$. Dowód prowadzimy indukcyjnie ze względu na budowę formuły α. Jeśli $\alpha = p$, gdzie $p \in V$ spawa jest oczywista: $s(p) \leqslant x \leqslant y$, zatem $y \Vdash p$.

Jeżeli $\alpha = \beta \wedge \gamma$ to z warunku (4.2) mamy $x \Vdash \beta$ oraz $x \Vdash \gamma$, więc z założenia indukcyjnego $y \Vdash \beta$ i $y \Vdash \gamma$, co daje $y \Vdash \beta \wedge \gamma$.

Jeśli $\alpha = \neg\beta$ to dostajemy łatwo:

$$x \Vdash \neg\beta \quad \Rightarrow \quad \forall_{w \in Kt(x)}\ w \nVdash \beta \quad \Rightarrow \quad \forall_{w \in Kt(y)}\ w \nVdash \beta \quad \Rightarrow \quad y \Vdash \neg\beta.$$

Z uwagi na udowodnione punkty (i) i (ii) prowadzony dowód indukcyjny możemy w tym miejscu zakończyć. Istotnie, resztę dowodu da się wykonać bez potrzeby korzystania z założenia indukcyjnego, w następujący sposób:

$$x \Vdash \beta \vee \gamma \quad \Rightarrow \quad x \Vdash \neg(\neg\beta \wedge \neg\gamma) \quad \Rightarrow \quad \forall_{w \in Kt(x)}\ w \nVdash \neg\beta \wedge \neg\gamma$$

$$\Rightarrow \quad \forall_{w \in Kt(y)}\ w \nVdash \neg\beta \wedge \neg\gamma \quad \Rightarrow \quad y \Vdash \neg(\neg\beta \wedge \neg\gamma) \quad \Rightarrow \quad y \Vdash \beta \vee \gamma,$$

i analogicznie dla implikacji.

Ad (iv) Jeśli $x \Vdash \alpha$ oraz $y \Vdash \beta$ to z udowodnionego punktu (iii) wynika, że $x \vee y \Vdash \alpha$ i $x \vee y \Vdash \beta$, zatem $x \vee y \Vdash \alpha \wedge \beta$.

Ad(v) Prosty dowód indukcyjny.

Ad(vi) Przypuśćmy niewprost, że $x \neq 1$. Wówczas istnieje pewien świat $w \in Kt(x)$, a skoro $x \Vdash \alpha$ to $w \Vdash \alpha$. Skoro jednak $x \models \neg\alpha$ to w szczególności $w \nVdash \alpha$; sprzeczność. Implikacja przeciwna wynika z (v).

Ad(vii) Załóżmy, że $x \Vdash \alpha$; jeśli $x = 1$ to z punktu (v) dostajemy oczywiście $x \Vdash \neg\neg\alpha$. W przeciwnym przypadku, gdy $x \neq 1$ z (vi) mamy:

$$\forall_{w \in Kt(x)}\ w \nVdash \neg\alpha,$$

a zatem $x \Vdash \neg\neg\alpha$.

Ad(viii) Skoro $x \Vdash \neg\neg\alpha$ i $x \neq 1$ to wobec (vi) $x \nVdash \neg\alpha$; stąd i z definicji dostajemy tezę.

Ad(ix) Przypuśćmy niewprost, że $x \nVdash \alpha \to \beta$. Istnieje wtedy $w \in Kt(x)$ taki, że $w \Vdash \alpha$ oraz $w \nVdash \beta$. Z tego pierwszego i z założenia dostajemy jednak $w \Vdash \beta$, co wobec punktu (vi) jest sprzecznością, gdyż $x \neq 1$.

Ad(x) Implikacja $\Rightarrow$ jest oczywista z punktu (vi). Dla dowodu implikacji $\Leftarrow$ ustalmy dowolne $w \in Kt(x)$. Wówczas z założenia dostajemy implikację:

$$w \Vdash \alpha \ \Rightarrow \ w = 1,$$

skąd ostatecznie $w \nVdash \alpha$. ■

Twierdzenie 4.1 *Niech $w \in Kt(L)$ oraz $\alpha, \beta \in S$ będą dowolnie ustalone; wówczas:*

i. $w \Vdash \alpha \wedge \beta \quad \Leftrightarrow \quad w \Vdash \alpha \;\;\&\;\; w \Vdash \beta$,

ii. $w \Vdash \alpha \vee \beta \quad \Leftrightarrow \quad w \Vdash \alpha$ *lub* $w \Vdash \beta$,

iii. $w \Vdash \alpha \to \beta \quad \Leftrightarrow \quad w \nVdash \alpha$ *lub* $w \Vdash \beta$,

iv. $w \Vdash \neg\alpha \quad \Leftrightarrow \quad w \nVdash \alpha$.

Dowód wszystkich czterech punktów jest oczywisty z samej definicji relacji weryfikowania. ■

Niech $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ będzie dowolną ale ustaloną kratą sytuacji elementarnych. Powiemy, że zdanie $\alpha \in S$ jest *tautologią kraty* $\mathcal{L}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej interpretacji $s\colon V \to At(L)$ i dla dowolnego $x \in L$, zachodzi $x \Vdash_s \alpha$. Zważając na lemat 4.1(iii), zdanie α jest tautologią kraty $\mathcal{L}$, gdy $0 \Vdash_s \alpha$ dla każdej funkcji $s\colon V \to At(L)$. Zbiór wszystkich tautologii kraty $\mathcal{L}$ oznaczamy przez $TR(\mathcal{L})$, tj.:

$$\alpha \in TR(\mathcal{L}) \;\Leftrightarrow\; (0 \Vdash_s \alpha, \;\; \text{dla dowolnej interpretacji } s\colon V \to At(L)). \tag{4.6}$$

Głównym celem sekcji 4.3, jak również rozdziału 5 będzie uchwycenie związku między tautologiami KRZ a tautologiami kraty sytuacji elementarnych. Pierwszym krokiem w tym kierunku jest poniższe twierdzenie, które dowodzimy bez trudu w oparciu o twierdzenie 4.1 i definicję relacji weryfikowania.

Twierdzenie 4.2 *Niech $\mathcal{L}$ będzie kratą sytuacji elementarnych. Wówczas każdy aksjomat KRZ* (*zob. definicja* 1.3) *jest tautologią kraty $\mathcal{L}$.*

Dowód prowadzimy dokonując elementarnej argumentacji. Dla przykładu uzasadnimy jedynie, że prawo sylogizmu jest weryfikowane w zerze. Ustalmy mianowicie dowolny $w \in Kt(L)$ i załóżmy, że:

$$w \Vdash \alpha \to \beta, \quad w \Vdash \beta \to \gamma, \quad w \Vdash \alpha.$$

Z twierdzenia 4.1 dostajemy łatwo $w \Vdash \gamma$. ■

4.2 Relacja weryfikowania a forsing intuicjonistyczny

Model Kripkego to uporządkowana trójka $(K, \leqslant, \varphi)$ taka, że $\langle K, \leqslant \rangle$ jest częściowym porządkiem, zaś $\varphi\colon V \to P(K)$ jest funkcją spełniającą warunek:

$$x \in \varphi(p) \ \& \ x \leqslant y \ \Rightarrow \ y \in \varphi(p),$$

dla dowolnych $x, y \in K$, $p \in V$. Dla lepszego porównania relacji weryfikowania z *relacja forsowania intuicjonistycznego* $\Vdash_\varphi$ (por. [5]; [20], s. 198) wzbogaćmy uniwersum modelu Kripkego o nowy element 1, o którym będziemy zakładać, że jest to "świat niemożliwy", czyli taki świat, w którym każde zdanie jest prawdziwe, tj. $1 \Vdash_\varphi \alpha$, dla $\alpha \in S$; ponadto, zakładamy, że $x \leqslant 1$ dla $x \in K$. Przy takiej modyfikacji warunki definiujące fosing intuicjonistyczny przybierają postać:

$$x \Vdash_\varphi p \ \Leftrightarrow \ x \in \varphi(p), \quad \text{dla} \ \ p \in V \tag{4.7}$$

$$x \Vdash_\varphi \alpha \wedge \beta \ \Leftrightarrow \ x \Vdash_\varphi \alpha \ \& \ x \Vdash_\varphi \beta, \tag{4.8}$$

$$x \Vdash_\varphi \neg\alpha \ \Leftrightarrow \ \forall_{x \leqslant y < 1} \ y \nVdash_\varphi \alpha, \tag{4.9}$$

$$x \Vdash_\varphi \alpha \vee \beta \ \Leftrightarrow \ (x \Vdash_\varphi \alpha \ \text{lub} \ x \Vdash_\varphi \beta), \tag{4.10}$$

$$x \Vdash_\varphi \alpha \to \beta \ \Leftrightarrow \ \forall_{x \leqslant y}(y \Vdash_\varphi \alpha \ \Rightarrow \ y \Vdash_\varphi \beta). \tag{4.11}$$

Jeżeli w $\varphi(p)$ (dla dowolnego $p \in V$) istnieje element najmniejszy to warunek (4.7) jest równoważny z (4.1), a zatem (4.1) jest szczególnym przypadkiem (4.7).

Warunek (4.2) jest tożsamy z (4.8). Podobnie, abstrahując od faktu, że krata jest koatomowa, warunek (4.3) przybiera postać:

$$x \Vdash_s \neg\alpha \ \Leftrightarrow \ \forall_{x \leqslant y < 1} \ y \nVdash_s \alpha.$$

Warunki (4.4) oraz (4.5) są słabsze niż odpowiadające im warunki forsowania intuicjonistycznego (4.10) i (4.11), odpowiednio. Istotnie, łatwo zauważyć, że:

$$x \Vdash \alpha \ \text{lub} \ x \Vdash \beta \ \ \Rightarrow \ \ x \Vdash \alpha \vee \beta.$$

Implikacja przeciwna natomiast nie zachodzi; istotnie rozważmy czteroelementową algebrę Boole'a o atomach a i b. Jako wartościowanie weźmy funkcję s taką, że $s(p) = a$. Wówczas $b \Vdash_s \neg p$, a zatem $0 \nVdash_s p$, $0 \nVdash_s \neg p$, a jednak $0 \Vdash_s p \vee \neg p$.

Z podobnych względów mamy:

$$\forall_{x \leqslant y}(y \Vdash_s \alpha \Rightarrow y \Vdash_s \beta) \quad \Rightarrow \quad x \Vdash_s \alpha \to \beta,$$

przy czym podobnie jak wcześniej implikacja przeciwna nie jest prawdziwa. Rozważmy mianowicie liniowo uporządkowaną kratę $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, i interpretację $s(p) = \frac{1}{2}$. Mamy wówczas: $0 \Vdash_s (p \to p) \to p$ i $0 \Vdash_s p \to p$ ale $0 \nVdash_s p$.

4.3 Semantyka krat rozdzielonych

Udowodnione twierdzenie 4.2 prowokuje do postawienia pytania:

Czy dla dowolnej tautologii KRZ α, prawdą jest, że $0_{\mathcal{L}} \Vdash_s \alpha$?

(gdzie $\mathcal{L}$ jest kratą sytuacji elementarnych, zaś $s\colon V \to At(L)$ dowolnym wartościowaniem zmiennych). Ze względu na wspomniane twierdzenie oraz twierdzenie Posta o pełności KRZ (por. twierdzenie 1.6), aby uzyskać pozytywną odpowiedź na postawiony problem, wystarczyłoby pokazać, że reguła modus ponens jest weryfikowana w zerze, czyli:

$$0_{\mathcal{L}} \Vdash_s \alpha \to \beta \quad \Rightarrow \quad (0_{\mathcal{L}} \Vdash_s \alpha \quad \Rightarrow \quad 0_{\mathcal{L}} \Vdash_s \beta). \tag{4.12}$$

Jak już było wspomniene w sekcji 4.2, własność ta nie jest spełniona w liniowo uporządkowanej kracie $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, przy interpretacji $s(p) = \frac{1}{2}$.

Poniżej podamy algebraiczny odpowiednik semantycznej własności (4.12). Niech $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ będzie dowolną kratą sytuacji elementarnych. Powiemy, że $\mathcal{L}$ jest *rozdzielona w punkcie* $x \in L$ (symbolicznie: $sep(x)$) wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{y \nleqslant x} \exists_{w \in Kt(x)}\ y \nleqslant w.$$

Dodajmy, że przy tym oznaczeniu, krata $\mathcal{L}$ jest rozdzielona (por. definicja 2.1(iv)) wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{x \in L}\ sep(x)$. Udowodnimy teraz lemat ujmujący ważną własność krat rozdzielonych.

Lemat 4.2 *Niech $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ będzie dowolną kratą sytuacji elementarnych, zaś $s\colon V \to At(L)$ dowolnym wartościowaniem zmiennych. Ustalmy ponadto $x \in L$ i załóżmy, że $sep(x)$; dla dowolnego $\alpha \in S$ zachodzi wówczas:*

$$x \nVdash_s \alpha \quad \Rightarrow \quad \exists_{w \in Kt(x)}\ w \Vdash_s \neg\alpha.$$

Dowód lematu poprowadzimy indukcyjnie ze względu na budowę zdania α. Skoro wartościowanie s jest ustalone, będziemy dla przejrzystości opuszczali indeks s przy relacji weryfikowania.

Niech $\alpha = p$, dla pewnego $p \in V$. Wówczas $x \not\Vdash p$ oznacza, że $s(p) \nleqslant x$, a skoro $sep(x)$ zatem istnieje $w \in Kt(x)$ takie, że $s(p) \nleqslant w$, tj. $w \not\Vdash p$. Z twierdzenia 4.1 mamy zatem $w \Vdash \neg p$.

Załóżmy teraz, że $\alpha = \neg\beta$. Obliczamy:

$$x \not\Vdash \neg\beta \;\Rightarrow\; \exists_{w\in Kt(x)}\, w \Vdash \beta \;\Rightarrow\; \exists_{w\in Kt(x)}\, w \Vdash \neg\neg\beta.$$

Niech z kolei $\alpha = \beta \wedge \gamma$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x \not\Vdash \beta$. Wówczas z założenia indukcyjnego istnieje $w \in Kt(x)$ takie, że $w \Vdash \neg\beta$. Łatwo zauważyć, że również $w \Vdash \neg(\beta \wedge \gamma)$.

Niech $\alpha = \beta \vee \gamma$; obliczamy bez trudu:

$$x \not\Vdash \beta \vee \gamma \;\Rightarrow\; \exists_{w\in Kt(x)}(w \not\Vdash \beta \;\&\; w \not\Vdash \gamma) \;\Rightarrow\; \exists_{w\in Kt(x)}\, w \Vdash \neg\beta \wedge \neg\gamma$$

$$\Rightarrow\; \exists_{w\in Kt(x)}\, w \Vdash \neg\neg(\neg\beta \wedge \neg\gamma) \;\Rightarrow \exists_{w\in Kt(x)}\, w \Vdash \neg(\beta \vee \gamma).$$

Jeśli w końcu $\alpha = \beta \to \gamma$ to:

$$x \not\Vdash \beta \to \gamma \;\Rightarrow\; x \not\Vdash \neg(\beta \wedge \neg\gamma) \;\Rightarrow\; \exists_{w\in Kt(x)}\, w \Vdash \beta \wedge \neg\gamma$$

$$\Rightarrow\; \exists_{w\in Kt(x)}\, w \Vdash \neg\neg(\beta \wedge \neg\gamma) \;\Rightarrow\; \exists_{w\in Kt(x)}\, w \Vdash \neg(\beta \to \gamma). \quad \blacksquare$$

Uwaga 4.1 *Założenie sep*(x) *w twierdzeniu* 4.2 *jest konieczne.*

Dowód. Wystarczy rozważyć algebrę Boole'a $\mathcal{B}_2$ z tzw. masztem, tj. pięcioelementową kratę o uniwersum $\{0, a, b, c, 1\}$ uporządkowanym tak: $0 < a, b < c < 1$. $\blacksquare$

Twierdzenie 4.3 *Niech* $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ *będzie dowolną kratą sytuacji elementarnych oraz* $x \in L$. *Wówczas, jeżeli sep*(x) *to dla dowolnego* $s\colon V \to At(L)$ *oraz* $\alpha, \beta \in S$:

$$x \Vdash_s \alpha \to \beta \;\Rightarrow\; (x \Vdash_s \alpha \;\Rightarrow\; x \Vdash_s \beta).$$

Jeśli ponadto $\mathcal{L}$ *jest skończenie atomistyczna, to prawdziwa jest również implikacja przeciwna.*

Dowód. Załóżmy, że $x \Vdash_s \alpha \to \beta$, $x \Vdash_s \alpha$ oraz przypuśćmy niewprost, że $x \nVdash_s \beta$. Stąd i z założenia $sep(x)$, dostajemy wobec lematu 4.2, że istnieje $w \in Kt(x)$, takie, że $w \Vdash_s \neg\beta$. Wówczas $w \Vdash_s \alpha \wedge \neg\beta$, a z drugiej strony, z lematu 4.1(ii), również $w \Vdash_s \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$; sprzeczność.

Załóżmy teraz, że krata $\mathcal{L}$ jest skończenie atomistyczna; udowodnimy implikację przeciwną. Przez kontrapozycję załóżmy mianowicie, że istnieje $y \nleqslant x$ takie, że:

$$\forall_{w \in Kt(x)}\ y \leqslant w. \tag{4.13}$$

Jest oczywistym, że $y \neq 0$ zatem $\sup Y = y$ dla pewnego skończonego zbioru atomów $Y \subseteq At(L)$. Podobnie, jeśli $x \neq 0$, niech X będzie skończonym zbiorem atomów takim, że $\sup X = x$; w przeciwnym przypadku kładziemy $X = \emptyset$.

Jako wartościowanie bierzemy dowolną funkcję $s\colon V \to At(L)$ taką, że $X \cup Y \subseteq s[V]$ (możemy to zrobić skoro $X \cup Y$ jest zbiorem skończonym). Łatwo teraz zauważyć, że istnieją zdania $\alpha, \beta \in S$ o własnościach jak niżej:

$$z \Vdash_s \alpha \ \Leftrightarrow\ x \leqslant z, \tag{4.14}$$

$$z \Vdash_s \beta \ \Leftrightarrow\ y \leqslant z, \tag{4.15}$$

dla każdego $z \in L$. Istotnie, dla (4.14) zauważmy, że jeżeli $X = \emptyset$, kładziemy $\alpha = p \to p$, dla dowolnie ustalonego $p \in V$. W przypadku przeciwnym, gdy $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, istnieją zdania atomowe $p_1, \ldots, p_k \in V$, takie, że $s(p_i) = x_i$ (dla $i \leqslant k$). Łatwo sprawdzić, że koniunkcja $\alpha = p_1 \wedge \ldots \wedge p_k$ spełnia (4.14). Analogiczny argument uzasadnia (4.15).

Z warunku (4.14) mamy oczywiście $x \Vdash_s \alpha$ oraz $x \nVdash_s \beta$. Nasz dowód będzie kompletny, jeśli pokażemy, że $x \Vdash_s \alpha \to \beta$. Ustalmy w tym celu $w \in Kt(x)$ i zauważmy, że z (4.13) dostajemy $y \leqslant w$, a więc z (4.15) $w \Vdash_s \beta$. Stąd ostatecznie $x \Vdash_s \alpha \to \beta$. ■

Wniosek 4.1 *Niech $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ będzie kratą sytuacji elementarnych. Jeśli $\mathcal{L}$ jest rozdzielona, to dla dowolnych $s\colon V \to L$, $\alpha, \beta \in S$ i $x \in L$ zachodzi:*

$$x \Vdash_s \alpha \to \beta \ \Leftrightarrow\ \forall_{x \leqslant y}(y \Vdash_s \alpha \ \Rightarrow\ y \Vdash_s \beta). \tag{4.16}$$

Ponadto, jeśli $\mathcal{L}$ jest skończenie atomistyczna, to zachodzi również implikacja przeciwna.

Dowód. Ustalmy $x \leqslant y$ i załóżmy, że $x \Vdash_s \alpha \to \beta$ oraz $y \Vdash_s \alpha$. Krata $\mathcal{L}$ jest rozdzielona, więc w szczególności $sep(y)$, a zatem z twierdzenia 4.3 dostajemy $y \Vdash_s \beta$. Implikacja przeciwna równoważności (4.16) wynika trywialnie z lematu 4.1(ix).

Aby dowieść drugiej części tezy załóżmy, że $\mathcal{L}$ jest skończenie atomistyczna przy czym spełniona jest równoważność (4.16) dla dowolnej interpretacji $s\colon V \to At(L)$, e-sytuacji $x \in L$ oraz zdań $\alpha, \beta \in S$. Z twierzenia 4.3 wynika więc, że $sep(x)$, co wobec dowolności x oznacza, że krata $\mathcal{L}$ jest rozdzielona. ■

Odnotujmy szczególny przypadek twierdzenia 4.3:

Wniosek 4.2 *Niech $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ będzie dowolną kratą sytuacji elementarnych. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

i. $sep(0)$,

ii. $0 \Vdash_s \alpha \to \beta \Rightarrow (0 \Vdash_s \alpha \Rightarrow 0 \Vdash_s \beta)$, *dla dowolnego* $s\colon V \to At(L)$ *oraz* $\alpha, \beta \in S$.

Dowód. Implikacja (i)⇒(ii) jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 4.3. Implikację przeciwną (ii)⇒(i) uzasadnimy przez kontrapozycję. Załóżmy mianowicie, że istnieje $y \in L$ taki, że $y \neq 0$ oraz

$$\forall_{w \in Kt(0)}\ y \leqslant w.$$

Istnieje wówczas atom $a \in At(y)$ przy czym:

$$\forall_{w \in Kt(L)}\ a \leqslant w.$$

Rozważmy wartościowanie $s\colon V \to At(L)$ przyjmujące wartość w a, tj. $s(p) = a$ dla pewnego $p \in V$. Łatwo zauważyć, że $0 \nVdash_s p$ oraz $0 \Vdash_s p \to p$. Naśladując dowód twierdzenia 4.3 pokazujemy bez trudu, że $0 \Vdash_s (p \to p) \to p$, co ostatecznie kończy naszą argumentację. ■

Wniosek 4.3 *Niech $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ będzie dowolną kratą sytuacji elementarnych, zaś $s\colon V \to At(L)$ dowolnym wartościowaniem zmiennych. Jeżeli $sep(0)$, to dla dowolnego $\alpha \in S$ zachodzi:*

$$\alpha \textit{ jest tautologią KRZ} \ \Rightarrow\ 0 \Vdash_s \alpha.$$

Dowód 1. Konsekwencja twierdzenia Posta o pełności KRZ, twierdzenia 4.2 oraz wniosku 4.2.

Dowód 2. Przez kotrapozycję załóżmy, że $0 \not\Vdash_s \alpha$. Wówczas z lematu 4.2 istnieje $w \in Kt(L)$ takie, że $w \Vdash_s \neg\alpha$. Rozważmy zero-jedynkowe wartościowanie $v \colon S \to \{0, 1\}$ dane przez poniższą równoważność:

$$v(p_i) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad w \Vdash_s p_i,$$

dla dowolnego $p_i \in V$. Łatwą indukcją dowodzimy jak następuje:

$$v(\varphi) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad w \Vdash_s \varphi, \tag{4.17}$$

dla $\varphi \in S$. Istotnie, jeśli φ jest zmienną, równoważność jest prawdziwa z definicji; załóżmy zatem, że (4.17) zachodzi dla formuł ψ, ϑ. Krok indukcyjny wykonujemy korzystając z założenia indukcyjnego i twierdzenia 4.1. Jeśli $\varphi = \psi \wedge \vartheta$, obliczamy bez trudu:

$$v(\varphi) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v(\psi \wedge \vartheta) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad [v(\psi) = 1 \;\;\&\;\; v(\vartheta) = 1]$$

$$\Leftrightarrow \quad [w \Vdash_s \psi \;\;\&\;\; w \Vdash_s \vartheta] \quad \Leftrightarrow \quad w \Vdash_s \psi \wedge \vartheta \quad \Leftrightarrow \quad w \Vdash_s \varphi;$$

dla $\varphi = \psi \vee \vartheta$:

$$v(\varphi) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v(\psi \vee \vartheta) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad [v(\psi) = 1 \;\text{ lub }\; v(\vartheta) = 1]$$

$$\Leftrightarrow \quad [w \Vdash_s \psi \;\text{ lub }\; w \Vdash_s \vartheta] \quad \Leftrightarrow \quad w \Vdash_s \psi \vee \vartheta \quad \Leftrightarrow \quad w \Vdash_s \varphi;$$

dla $\varphi = \psi \to \vartheta$:

$$v(\varphi) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v(\psi \to \vartheta) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad [v(\psi) = 0 \;\text{ lub }\; v(\vartheta) = 1]$$

$$\Leftrightarrow \quad [w \not\Vdash_s \psi \;\text{ lub }\; w \Vdash_s \vartheta] \quad \Leftrightarrow \quad w \Vdash_s \psi \to \vartheta \quad \Leftrightarrow \quad w \Vdash_s \varphi;$$

i podobnie dla $\varphi = \neg\psi$:

$$v(\varphi) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v(\neg\psi) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v(\psi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad w \not\Vdash_s \psi \quad \Leftrightarrow \quad w \Vdash_s \neg\psi \quad \Leftrightarrow \quad w \Vdash_s \varphi.$$

Tym samym równoważność (4.17) została udowodniona. Jako wniosek z niej, dostajemy $v(\neg\alpha) = 1$ zatem $v(\alpha) = 0$. Skontruowaliśmy więc zero-jedynkowe wartościowanie falsyfikujące zdanie α; stąd α nie jest tautologią KRZ. ■

4.4 Tautologie kraty a tautologie e-matrycy

Niech $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ będzie kratą sytuacji elementarnych. Jak było powiedziane w sekcji 2.2, w każdej kracie sytuacji elementarnych jest wyróżniony dokładnie jeden koatom $w_{\mathcal{L}}$ nazywany światem realnym. Parę $\mathfrak{L} = \langle \mathcal{L}, w_{\mathcal{L}}\rangle$ będziemy nazywali *matrycą sytuacji elementarnych* lub krócej *e-matrycą*.

Zwróćmy uwagę na fakt, że definicja tautologii kraty w żaden sposób nie zależała od świata realnego $w_{\mathcal{L}}$. W sekcji niniejszej wprowadzimy pokrewne pojęcie tautologii e-matrycy (por. [19]) i zbadamy jego związek z pojęciem tautologii kraty. Powiemy mianowicie, że zdanie $\alpha \in S$ jest *tautologią e-matrycy* $\mathfrak{L} = \langle \mathcal{L}, w_{\mathcal{L}}\rangle$ (symbolicznie: $\alpha \in TR(\mathfrak{L})$), wtedy i tylko wtedy, gdy $w_{\mathcal{L}} \Vdash_s \alpha$, dla dowolnego wartościowania $s: V \to At(L)$.

Twierdzenie 4.4 *Jeżeli $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ jest kratą sytuacji elementarnych spełniającą warunki $sep(0)$ oraz $At(w_{\mathcal{L}}) \neq At(L)$ to $TR(\mathfrak{L}) = TR(\mathcal{L})$.*

Dowód. Inkluzja $TR(\mathcal{L}) \subseteq TR(\mathfrak{L})$ jest oczywista. Dla dowodu inkluzji przeciwnej ustalmy dowolne $\alpha \in S$ i załóżmy, że $0 \nVdash_t \alpha$ dla pewnego wartościowania $t: V \to At(L)$. Z lematu 4.2 istnieje $w \in Kt(L)$ taki, że $w \Vdash_t \neg\alpha$. Przy pomocy interpretacji t skonstruujemy interpretację $s: V \to At(L)$ taką, że $w_{\mathcal{L}} \nVdash_s \alpha$.

Rozważmy zero-jedynkowe wartościowanie $v: S \to \{0, 1\}$ dane przez poniższą równoważność:

$$v(p_i) = 1 \;\Leftrightarrow\; w \Vdash_t p_i,$$

dla dowolnego $p_i \in V$. Łatwą indukcją dowodzimy jak następuje:

$$v(\varphi) = 1 \;\Leftrightarrow\; w \Vdash_t \varphi, \tag{4.18}$$

dla $\varphi \in S$. Istotnie, jeśli φ jest zmienną, równoważność jest prawdziwa z definicji. Krok indukcyjny wykonujemy korzystając z założenia indukcyjnego i twierdzenia 4.1, rozumując dokładnie tak samo jak w dowodzie 2. wniosku 4.3.

Jako wniosek z (4.18), dostajemy $v(\neg\alpha) = 1$. Dla każdego $p_i \in V$ połóżmy teraz:

$$\overline{p_i} = \begin{cases} p_i & \text{jeśli } v(p_i) = 1 \;\; (\Leftrightarrow \; w \Vdash_t p_i) \\ \neg p_i & \text{jeśli } v(p_i) = 0 \;\; (\Leftrightarrow \; w \nVdash_t p_i) \end{cases}$$

oraz zdefiniujmy (używając pewnika wyboru) interpretację $s\colon V \to At(L)$ w następujący sposób:

$$s(p_i) \in At(w_{\mathcal{L}}) \;\Leftrightarrow\; w \Vdash_t p_i.$$

Stosując jeszcze raz metodę indukcyjną, na podstawie twierdzenia 4.1 oraz założenia $At(w_{\mathcal{L}}) \neq At(L)$, dowodzimy bez trudu:

$$w_{\mathcal{L}} \Vdash_s \varphi \;\Leftrightarrow\; w \Vdash_t \varphi. \tag{4.19}$$

Skoro jednak $w \Vdash_t \neg\alpha$ to oczywiście $w \nVdash_t \alpha$, zatem z (4.19) dostajemy ostatecznie $w_{\mathcal{L}} \nVdash_s \alpha$, co było do okazania. ■

Uwaga 4.2 *Założenie $At(w_{\mathcal{L}}) \neq At(L)$ jest istotne.*

Dowód. Przypuśćmy, że $At(w_{\mathcal{L}}) = At(L)$ oraz ustalmy dowolne zdanie $p \in V$ i interpretację $s\colon V \to A(L)$. Wówczas oczywiście $0 \nVdash_s p$, a z drugiej strony $s(p) \in At(L) = At(w_{\mathcal{L}})$, zatem $w_{\mathcal{L}} \Vdash_s p$. ■

Uwaga 4.3 *Nie umiemy rozstrzygnąć czy $sep(0)$ jest warunkiem koniecznym.* ■

4.5 Weryfikatory, miejsca logiczne i obiektywy zdań

Na potrzeby rozważań niniejszej sekcji ustalmy dowolną kratę sytuacji elementarnych $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ oraz wartościowanie $s\colon V \to At(L)$. Dla dowolnego zdania $\alpha \in S$ połóżmy:

$$V_s(\alpha) = \{x \in L : x \Vdash_s \alpha\},$$

$$M_s(\alpha) = \{w \in Kt(L) : w \Vdash_s \alpha\},$$

$$O_s(\alpha) = \{x \in V_s(\alpha) : \forall_{y \in V_s(\alpha)}(y \leqslant x \Rightarrow x = y)\}.$$

Zbiór $V_s(\alpha)$ nazywamy (por. [25], s. 58) *zbiorem weryfikatorów zdania* α *(przy wartościowaniu* s*)*, zbiór $M_s(\alpha)$ – *miejscem logicznym zdania* α *(przy wartościowaniu* s*)*, zaś zbiór $O_s(\alpha)$ – *obiektywem zdania* α *(przy wartościowaniu* s*)*. Ponadto, ogół weryfikatorów (w kracie $\mathcal{L}$ przy interpretacji s) oznaczmy przez $\mathbf{V}_{\mathcal{L},s}$, ogół miejsc logicznych (w kracie $\mathcal{L}$ przy interpretacji s), przez $\mathbf{M}_{\mathcal{L},s}$, zaś ogół obiektywów (w kracie $\mathcal{L}$ przy interpretacji s), przez $\mathbf{O}_{\mathcal{L},s}$. Zawsze tam, gdzie krata $\mathcal{L}$ i interpretacja s są ustalone – jak w tej sekcji – będziemy opuszczali indeksy we wprowadzonych oznaczeniach.

Jako oczywisty wniosek z twierdzenia 4.1 odnotujmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.5 *Struktura* $\mathcal{M} = \langle \mathbf{M}, \cap, \cup, ', \emptyset, Kt(L)\rangle$ *jest algebrą Boole'a, tzn. dla dowolnych* $\alpha, \beta \in S$ *zachodzi:*

i. $\emptyset \subseteq M(\alpha) \subseteq Kt(L)$,

ii. $M(\alpha) \cap M(\beta) = M(\alpha \wedge \beta)$,

iii. $M(\alpha) \cup M(\beta) = M(\alpha \vee \beta)$,

iv. $M(\alpha)' = M(\neg\alpha) = Kt(L) \setminus M(\alpha)$. ■

Lemat 4.3 *Jeśli krata* $\mathcal{L}$ *jest rozdzielona, to dla dowolnego* $\alpha \in S$ *zachodzi:*

$$V(\alpha) \subseteq V(\beta) \;\Leftrightarrow\; M(\alpha) \subseteq M(\beta).$$

Dowód. Implikacja $\Rightarrow$ jest w sposób oczywisty prawdziwa w każdej kracie. Dla dowodu implikacji $\Leftarrow$ ustalmy $x \in L$ i załóżmy, że $x \Vdash \alpha$. Wówczas mamy:

$$\forall_{w \in Kt(L)}(x \leqslant w \;\Rightarrow\; w \Vdash \alpha),$$

a dalej z założenia:

$$\forall_{w \in Kt(L)}(w \Vdash \alpha \;\Rightarrow\; w \Vdash \beta),$$

skąd wynika, że:

$$\forall_{w \in Kt(L)}(x \leqslant w \;\Rightarrow\; w \Vdash \beta). \tag{4.20}$$

Gdyby teraz przypuścić, że $x \nVdash \beta$ to z lematu 4.2 dostalibyśmy, że istnieje $w_0 \in Kt(x)$ takie, że $w_0 \Vdash \neg\beta$, a to jest sprzeczne z (4.20). ■

Uwaga 4.4 *Założenie, że krata $\mathcal{L}$ jest rozdzielona jest istotne.*

Dowód. Wystarczy rozważyć algebrę Boole'a $\mathcal{B}_2$ z masztem (zob. dowód uwagi 4.1). ■

Rozważmy teraz system relacyjny $\langle \mathbf{V}, \sqsubset \rangle$, gdzie:

$$V(\alpha) \sqsubset V(\beta) \;\Leftrightarrow\; V(\alpha) \supseteq V(\beta).$$

Relacja $\sqsubset$ jest oczywiście relacją częściowego porządku. W poniższym lemacie dowodzimy, że jest ona również kratowa, o ile krata $\mathcal{L}$ jest rozdzielona.

Lemat 4.4 *Jeśli $\mathcal{L}$ jest rozdzielona to relacja $\sqsubset$ jest relacją kratową, tzn. dla dowolnych $\alpha, \beta \in S$ zachodzi:*

i. $\sup_{\sqsubset}\{V(\alpha), V(\beta)\} = V(\alpha \wedge \beta)$,

ii. $\inf_{\sqsubset}\{V(\alpha), V(\beta)\} = V(\alpha \vee \beta)$.

Dowód. Ad (i) Po pierwsze, oczywiście $V(\alpha \wedge \beta) \subseteq V(\alpha)$, zatem $V(\alpha) \sqsubset V(\alpha \wedge \beta)$. Załóżmy teraz, że $V(\alpha), V(\beta) \sqsubset V(\gamma)$; mamy wówczas:

$$V(\gamma) \subseteq V(\alpha), V(\beta) \;\Rightarrow\; V(\gamma) \subseteq V(\alpha \wedge \beta) \;\Rightarrow\; V(\alpha \wedge \beta) \sqsubset V(\gamma).$$

Ad (ii) Jest oczywistym, że $V(\alpha) \subseteq V(\alpha \vee \beta)$, zatem $V(\alpha \vee \beta) \sqsubset V(\alpha)$. Załóżmy że $V(\gamma) \sqsubset V(\alpha), V(\beta)$; korzystając z lematu 4.3 obilczamy:

$$V(\alpha), V(\beta) \subseteq V(\gamma) \;\Rightarrow\; M(\alpha), M(\beta) \subseteq M(\gamma) \;\Rightarrow\; M(\alpha) \cup M(\beta) \subseteq M(\gamma)$$

$$\Rightarrow\; M(\alpha \vee \beta) \subseteq M(\gamma) \;\Rightarrow\; V(\alpha \vee \beta) \subseteq V(\gamma) \;\Rightarrow\; V(\gamma) \sqsubset V(\alpha \vee \beta).$$ ■

Wobec udowodnionego lematu 4.4 struktura $\mathcal{V} = \langle \mathbf{V}, \sqsubset \rangle$ jest kratą o ile krata sytuacji elementarnych (z której tamta jest "zbudowana") jest rozdzielona. Wprowadźmy oznaczenia:

$$V(\alpha) \sqcup V(\beta) = V(\alpha \wedge \beta),$$

$$V(\alpha) \sqcap V(\beta) = V(\alpha \vee \beta).$$

Krata $\mathcal{V}$ jest dystrybutywna:

$$V(\alpha)\sqcup(V(\beta)\sqcap V(\gamma)) = V(\alpha)\sqcup V(\beta\vee\gamma) = V(\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)) = V((\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma))$$
$$= V(\alpha\wedge\beta)\sqcap V(\alpha\wedge\gamma) = (V(\alpha)\sqcup V(\beta))\sqcap(V(\alpha)\sqcup V(\gamma))$$

Równość dualną uzasadniamy analogicznie. Dalej zauważmy, że dla dowolnego $\alpha \in S$ zachodzi:

$$L \sqsubset V(\alpha) \sqsubset \{1\},$$

przy czym $L = V(p\vee\neg p)$ oraz $\{1\} = V(p\wedge\neg p)$. Na koniec, zauważmy jeszcze, że:

$$V(\alpha)\sqcup V(\neg\alpha) = V(\alpha\wedge\neg\alpha) = \{1\},$$
$$V(\alpha)\sqcap V(\neg\alpha) = V(\alpha\vee\neg\alpha) = L,$$

co wobec dystrybutywności kraty $\mathcal{V}$ (jedyność dopełnienia, zob. 1.1) oznacza, że jest ona komplementarna. Można wobec tego zdefiniować funkcję dopełnienia: $V(\alpha)' = V(\neg\alpha)$. Jako podsumowanie powyższych rozważań odnotujmy twierdzenie.

Twierdzenie 4.6 *Jeżeli krata sytuacji elementarnych* $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ *jest rozdzielona, to struktura* $\mathcal{V} = \langle \mathbf{V}, \sqcup, \sqcap, ', L, \{1\}\rangle$ *jest algebrą Boole'a.* ■

Przejdziemy teraz z kolei do charakteryzacji obiektywów. Na początek podkreślmy, że obiektyw $O(\alpha)$ zdania α może być zbiorem pustym. Dzieje się tak wtedy, gdy nie istnieją minimalne e-sytuacje w rozważanej kracie sytuacji elementarnych, które weryfikują zdanie α. W tym przypadku $O(\alpha) = \emptyset$. Tego typu okoliczność jest możliwa wyłącznie w kratach nieskończenie długich, chociaż tak być nie musi (przykład kraty nieskończenie długiej, w której $O(\alpha) \neq \emptyset$ dla każdego $\alpha \in S$, podamy w sekcji 5.1). W dalszej części niniejszej sekcji implicite zakładamy, że krata sytuacji elementarnych jest dla naszego celu odpowiednia, tzn. żaden obiektyw nie jest zbiorem pustym. Przy tym założeniu, własności weryfikatorów można z powodzeniem "przetransportować" na obiektywy.

Odpowiednikiem relacji $\sqsubset$ jest w dziedzinie obiektywów relacja $\Subset$ zdefiniowana poniżej (por. [25], II.2.1):

$$O(\alpha) \Subset O(\beta) \;\Leftrightarrow\; \forall_{x\in O(\beta)}\, \exists_{y\in O(\alpha)}\; y \leqslant x,$$

dla dowolnych $O(\alpha), O(\beta) \in \mathbf{O}$. Relacja $\Subset$ jest częściowym porządkiem. Zwrotność i przechodniość jest oczywista, pokażemy więc jedynie, że jest ona słabo antysymetryczna. Załóżmy przeto, że $O(\alpha) \Subset O(\beta)$ oraz $O(\beta) \Subset O(\alpha)$. Jeśli $x \in O(\beta)$, istnieje wówczas $y \in O(\alpha)$ takie, że $y \leqslant x$, a z drugiej strony istnieje $z \in O(\beta)$ przy czym $z \leqslant y$. Stąd $z \leqslant x$, a z własności obiektywów $z = x$, zatem $x = y = z$ i ostatecznie $x \in O(\alpha)$. Tym sposobem udowodniliśmy: $O(\beta) \subseteq O(\alpha)$; inkluzję przeciwną dowodzi się analogicznie.

Używając podobnych argumentów jak w dowodzie lematów 4.3 i 4.4 dowodzimy następujących faktów.

Lemat 4.5 *Jeśli krata $\mathcal{L}$ jest rozdzielona, to dla dowolnego $\alpha \in S$ zachodzi:*

$$O(\beta) \Subset O(\alpha) \;\Leftrightarrow\; M(\alpha) \subseteq M(\beta). \;\blacksquare$$

Lemat 4.6 *Jeśli $\mathcal{L}$ jest rozdzielona to relacja $\Subset$ jest relacją kratową, tzn. dla dowolnych $\alpha, \beta \in S$ zachodzi:*

i. $\sup_{\Subset}\{O(\alpha), O(\beta)\} = O(\alpha \wedge \beta)$,

ii. $\inf_{\Subset}\{O(\alpha), O(\beta)\} = O(\alpha \vee \beta)$. $\blacksquare$

Struktura $\langle \mathbf{O}, \Subset \rangle$ jest kratą, wprowadźmy zatem oznaczenia:

$$O(\alpha) \Cup O(\beta) = O(\alpha \wedge \beta),$$

$$O(\alpha) \Cap O(\beta) = O(\alpha \vee \beta).$$

Zauważmy, że w $\mathbf{O}$ istnieje zero oraz jedynka. Istotnie, dla dowolnego $\alpha \in S$ zachodzi:

$$\{0\} \Subset O(\alpha) \Subset \{1\}.$$

przy czym $\{0\} = O(p \vee \neg p)$ oraz $\{1\} = O(p \wedge \neg p)$. Dalej, łatwo dowodzimy, że krata $\langle \mathbf{O}, \Subset, \{0\}, \{1\} \rangle$ jest dystrybutywna i komplementarna, czyli:

$$O(\alpha) \Cup O(\neg\alpha) = O(\alpha \wedge \neg\alpha) = \{1\},$$

$$O(\alpha) \Cap O(\neg\alpha) = O(\alpha \vee \neg\alpha) = \{0\},$$

definiujemy zatem funkcję dopełnienia:

$$O(\alpha)' = O(\neg\alpha).$$

Wobec powyższych uwag zachodzi twierdzenie.

Twierdzenie 4.7 *Jeżeli krata sytuacji elementarnych $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1 \rangle$ jest rozdzielona, to struktura $\mathcal{O} = \langle \mathbf{O}, \Cup, \Cap, ', \{0\}, \{1\} \rangle$ jest algebrą Boole'a.* $\blacksquare$

Rozdział 5

Pełność KRZ względem krat sytuacji elementarnych

W rozdziale niniejszym pokażemy pełność klasycznego rachunku zdań KRZ względem krat sytuacji elementarnych, przy warunkach interpretacji zdań określonych przez (4.1)-(4.5).

Z filozoficznego punktu widzenia szczególnie istotny jest ten przypadek, gdy interpretacja zmiennych jest funkcją różnowartościową. Żądanie to oznacza, że posługujemy się takim językiem (przy czym przez język rozumiemy teraz język z ustalonym sposobem rozumienia wyrażeń), w którym różne zdania atomowe opisują różne sytuacje. Przeciwny przypadek, gdy interpretacja s "zlepia" zmienne, jest w pewnym sensie nieinteresujący, gdyż o bogactwie języka świadczy przede wszystkim klasa sytuacji, które można w tym języku opisać. Jeśli np. V jest zbiorem zmiennych pewnego języka $\mathcal{S}$ oraz rozumienie zmiennych ustala odwzorowanie $s\colon V \to At(L)$ (gdzie $\mathcal{L}$ jest strukturą w którą interpretuje się zdania), przy czym s "zlepia" pewne zmienne, to istnieje język $\mathcal{S}'$, o zbiorze zmiennych V', który opisuje dokładnie te same sytuacje, a przy tym interpretacja $s'\colon V' \to At(L)$ jest różnowartościowa. Istotnie, zdefiniujmy przy pomocy aksjomatu wyboru zbiór V', jako ogół reprezentantów klas abstrakcji względem relacji $\sim_s \subseteq V \times V$ danej wzorem:

$$p \sim_s q \;\Leftrightarrow\; s(p) = s(q),$$

dla $p, q \in V$. Język $\mathcal{S}'$ jest generowany z V' przy pomocy spójników zdaniowych, zaś s' – obcięciem s do V'. Języki $\mathcal{S}$ oraz $\mathcal{S}'$ są tak samo bogate, co znaczy, że opisują dokładnie te same sytuacje.

Wobec powyższych uwag, wygodne będzie przyjąć następującą definicję: dla dowolnej kraty sytuacji elementarnych $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ oraz zdania $\alpha \in S$ kładziemy:

$$\alpha \in TR^{\bullet}(\mathcal{L}) \;\Leftrightarrow\; (0 \Vdash_s \alpha, \;\; \text{dla } s{:}\, V \to At(L), \text{takiej, że obcięcie } s|_{At(\alpha)} \text{ jest funkcją różnowartościową}),$$

gdzie $At(\alpha)$ oznacza zbiór zmiennych występujących w zdaniu α.

5.1 Krata uniwersalna

Niech $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ będzie dowolną kratą sytuacji elementarnych, zaś $s{:}\, V \to At(L)$ dowolnym wartościowaniem zmiennych. Dla każdego zbioru zdań $\Gamma \subseteq S$, zdania $\beta \in S$ kładziemy:

$$\Gamma \Vdash_{\mathcal{L},s} \beta \;\Leftrightarrow\; \forall_{x \in L}(x \Vdash_s \Gamma \;\Rightarrow\; x \Vdash_s \beta),$$

gdzie

$$x \Vdash_s \Gamma \;\Leftrightarrow\; \forall_{\alpha \in \Gamma}\, x \Vdash_s \alpha,$$

dla dowolnego $x \in L$. Dodajmy, że dla $\Gamma = \emptyset$ mamy:

$$\emptyset \Vdash_{\mathcal{L},s} \beta \;\Leftrightarrow\; \forall_{x \in L}(x \Vdash_s \emptyset \;\Rightarrow\; x \Vdash_s \beta) \;\Leftrightarrow\; 0 \Vdash_s \beta.$$

Definicja 5.1 *Niech $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant, 0, 1\rangle$ będzie kratą sytuacji elementarnych, zaś $s{:}\, V \to At(L)$ dowolną interpretacją zmiennych.*

i. *Parę $(\mathcal{L}, s)$ nazywamy* modelem sytuacyjnym.

ii. *Model sytuacyjny $(\mathcal{L}, s)$ nazywamy* uniwersalnym *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru formuł $\Gamma \subseteq S$ oraz $\beta \in S$ zachodzi:*

$$\beta \in Cn_2(\Gamma) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \Vdash_{\mathcal{L},s} \beta. \tag{5.1}$$

iii. *Kratę $\mathcal{L}$ nazywamy* uniwersalną*, gdy istnieje wartościowanie $s{:}\, V \to At(L)$ takie, że model $(\mathcal{L}, s)$ jest uniwersalny.*

Zauważmy, że wprost z powyższej definicji wynika, że jeśli model $(\mathcal{L}, s)$ jest uniwersalny to s jest funkcją różnowartościową. Istotnie, jeśli $s(p_i) = s(p_j)$ dla $p_i, p_j \in V$ to $0_{\mathcal{L}} \Vdash_s p_i \to p_j$ chociaż oczywiście $p_i \to p_j \notin CL$, czyli (5.1) nie zachodzi. Model $(\mathcal{L}, s)$ nie jest zatem uniwersalny.

Idąc krok dalej, wnioskujemy, że żadna krata $\mathcal{L}$ nie może być uniwersalna jeśli liczność jej atomów jest mniejsza niż liczność zmiennych zdaniowych. Skoro naszym ogólnym założeniem jest, że zbiór V jest nieskończony, żadna krata o skończonej liczbie atomów nie jest uniwersalna. W szczególności zatem żadna krata skończona nie jest uniwersalna.

Z podobnych powodów, żadna $\mathbb{BW}$-krata $\mathcal{L}$ nie jest uniwersalna. Istotnie, jeśli n oznacza liczbę wymiarów logicznych $\mathcal{L}$, to biorąc $n+1$ zmiennych $p_0, \ldots, p_n$ musi być tak, że dla pewnych $0 \leqslant i < j \leqslant n$, e-sytuacje $s(p_i)$ i $s(p_j)$ wpadają do jednego wymiaru logicznego, skoro tylko interpretacja s jest różnowartościowa (gdy s nie jest różnowartościowa, zachodzi przypadek opisany w akapicie powyżej). Wówczas łatwo zauważyć, że $0_{\mathcal{L}} \Vdash_s \neg(p_i \wedge p_j)$, choć oczywiście $\neg(p_i \wedge p_j) \notin CL$.

W niniejszej sekcji skonstruujemy kratę uniwersalną dla języka zdaniowego o przeliczalnie nieskończonej liczbie zmiennych i udowodnimy jej proste własności, zaś w sekcji następnej uzasadnimy, że faktycznie jest ona uniwersalna.

Przypomnijmy, że język zdaniowy $\mathcal{S}$ to algebra $\langle S, \wedge, \vee, \to, \neg \rangle$ wolno generowana przez przeliczalny zbiór zmiennych zdaniowych $V = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$. Zbiór literałów tj. zbiór $V \cup \{\neg p_0, \neg p_1, \neg p_2, \ldots\}$ oznaczyliśmy symbolem V^*; rozważmy następującą partycję zbioru V^*:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{U}} = \{\{p_i, \neg p_i\} : i \in \omega\}.$$

Do partycji tej, zastosujmy teraz operację $BW(\cdot)$ opisaną w sekcji 2.3; otrzymujemy:

$$U = BW(\mathcal{P}_{\mathcal{U}}), \quad \mathcal{U} = \langle U, \subseteq \rangle .$$

Zważając na dowód twierdzenia 2.3, łatwo zauważyć, że krata $\mathcal{U}$ spełnia wszystkie aksjomaty definiujące $\mathbb{BW}$-kratę, z wyjątkiem ostatniego warunku (ix) (zob. definicja 2.1). W szczególności $\mathcal{U}$ jest zupełną i rozdzieloną kratą sytuacji elementarnych, o elemencie najmniejszym – $\emptyset$, największym – V^* i zbiorze atomów:

$$At(U) = \{\{l\} : l \in V^*\}.$$

Rozważmy wartościowanie $u\colon V \to At(U)$ dane wzorem, dla $i \in \omega$:

$$u(p_i) = \{p_i\},$$

a ponadto funkcję: $h^u\colon V^* \to At(U)$ zdefinowaną w następujący sposób:

$$h^u(\overline{p_i}) = \begin{cases} \{p_i\} & \text{jeśli } \overline{p_i} = p_i \\ \{\neg p_i\} & \text{jeśli } \overline{p_i} = \neg p_i \end{cases}.$$

Funkcja h^u jest oczywiście rozszerzeniem wartościowania u do dziedziny V^*. Przyjmijmy ponadto, dla $x \in U$ definicję:

$$Th(x) = \{\alpha \in S : x \Vdash_u \alpha\}$$

i odnotujmy lemat.

Lemat 5.1 *Dla dowolnego $x \in U$, $i \in \omega$ oraz dowolnego ściśle rosnącego ciągu indeksów $(i_j)_{j\in I}$ $(I \subseteq \omega)$ zachodzi:*

i. $x \Vdash_u p_i \;\Leftrightarrow\; p_i \in x$,

ii. $x \Vdash_u \neg p_i \;\Leftrightarrow\; \neg p_i \in x$,

iii. $\biguplus\{h^u(\overline{p_{i_j}}) : j \in I\} \neq V^*$,

iv. $x \neq 1_U \;\Rightarrow\; Th(x)$ *jest niesprzecznym zbiorem zdań.*

Dowód. Punkt (i) jest oczywisty z definicji relacji $\Vdash_u$. Dla dowodu punktu (ii) załóżmy, że $x \Vdash_u \neg p_i$. Z definicji wartościowania u mamy $\{p_i\} \Vdash_u p_i$, zatem z lematu 4.1(vi) $x \uplus \{p_i\} = V^*$. Ostatecznie, z własności supremum w kracie $\mathcal{U}$ (por. (2.4)) oraz własności partycji $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ mamy $\neg p_i \in x$. Z drugiej strony, jeśli $\neg p_i \in x$ to dowolny koatom w taki, że $x \subseteq w$ nie weryfikuje zdania p_i, stąd wynika, że $x \Vdash_u \neg p_i$.

Dla dowodu punktu (iii) zauważmy, że skoro ciąg indeksów $(i_j)_{j\in I}$ jest ściśle rosnący to w zbiorze $\bigcup\{h^u(\overline{p_{i_j}}) : j \in I\}$ znajduje się co najwyżej jeden element z dowolnego $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}}$, zatem

$$\biguplus\{h^u(\overline{p_{i_j}}) : j \in I\} = \bigcup\{h^u(\overline{p_{i_j}}) : j \in I\} \neq V^*.$$

Punkt (iv) wynika łatwo z lematu 4.1(vi). Istotnie, gdyby $Th(x) = S$ to w szczególności $\alpha, \neg\alpha \in Th(x)$ dla $\alpha \in S$, zatem ze wspomnianego lematu byłoby $x = 1_U$. ■

5.2 Twierdzenie o pełności

W sekcji niniejszej udowodnimy, że model $(\mathcal{U}, u)$ jest uniwersalny. Będzie to zatem również twierdzenie o pełności KRZ względem modelu $(\mathcal{U}, u)$. W szczególności pokażemy zatem, że zbiór tautologii KRZ jest identyczny ze zbiorem tautologii kraty $\mathcal{U}$.

Twierdzenie 5.1 *Dla dowolnego zbioru formuł $\Gamma \subseteq S$ oraz $\beta \in S$ zachodzi:*

$$\beta \in Cn_2(\Gamma) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \Vdash_{\mathcal{U},u} \beta. \tag{5.2}$$

Dowód. $(\Rightarrow)$ Załóżmy, że $\beta \in Cn_2(\Gamma)$. Jeżeli $\Gamma = \emptyset$ to z wniosku 4.3 mamy $0_U \Vdash_u \beta$, zatem $\emptyset \Vdash_{\mathcal{U},u} \beta$. W przeciwnym przypadku, z finitarności operacji konsekwencji Cn_2, istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Gamma$ takie, że $\beta \in Cn_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, zatem z twierdzenia o dedukcji: $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k \to \beta \in CL$.

Ustalmy dowolne $x \in U$ i załóżmy, że $x \Vdash_u \Gamma$. W szczególności mamy $x \Vdash_u \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$, a z drugiej strony z wniosku 4.3, $x \Vdash_u \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k \to \beta$, zatem z twierdzenia 4.3 (krata $\mathcal{U}$ jest rozdzielona) dostajemy $x \Vdash_u \beta$, co należało pokazać.

$(\Leftarrow)$ Załóżmy teraz, że $\beta \notin Cn_2(\Gamma)$. Istnieje wówczas wartościowanie zero-jedynkowe $v\colon S \to \{0,1\}$ takie, że: $v[\Gamma] \subseteq \{1\}$ oraz $v(\beta) = 0$. Połóżmy dla $i \in \omega$:

$$\overline{p_i} = \begin{cases} p_i & \text{jeśli } v(p_i) = 1 \\ \neg p_i & \text{jeśli } v(p_i) = 0 \end{cases}$$

oraz:

$$w = \biguplus\{h^u(\overline{p_i}) : i \in \omega\}.$$

Indukcyjnie pokazujemy następującą równoważność:

$$w \Vdash_u \varphi \;\Leftrightarrow\; v(\varphi) = 1. \tag{5.3}$$

Istotnie, załóżmy, że $w \Vdash_u p_i$. Jest oczywistym, że $w \Vdash_u \overline{p_i}$ a poza tym z lematu 5.1(iii) $w \neq 1_U$ $(1_U = V^*)$. Stąd i z lematu 4.1(vi) wynika więc, że $\overline{p_i} = p_i$ czyli $v(p_i) = 1$. Z drugiej strony, jeśli $v(p_i) = 1$ to $\overline{p_i} = p_i$, więc $h^u(\overline{p_i}) = h^u(p_i)$ i ostatecznie $w \Vdash_u p_i$.

Dalsza część dowodu indukcyjnego nie nastręcza trudności: argumentacja przebiega tak samo jak w dowodzie wniosku 4.3.

Jako wniosek z (5.3) dostajemy $w \Vdash_u \Gamma$ oraz $w \nVdash_u \beta$, co kończy dowód.■

Wniosek 5.1 $CL = TR(\mathcal{U}) = TR^{\bullet}(\mathcal{U}) = Th(0_U)$.

Dowód stanowią poniższe inkluzje:

$$CL \subseteq TR(\mathcal{U}) \subseteq TR^{\bullet}(\mathcal{U}) \subseteq Th(0_U) \subseteq CL.$$

Pierwsza wynika z wniosku 4.3, druga i trzecia są oczywiste, zaś czwarta jest szczególnym przypadkiem ($\Gamma = \emptyset$) twierdzenia 5.1. ∎

Wniosek 5.1 jest słabym twierdzeniem o pełności klasycznego rachunku zdań KRZ względem modelu uniwersalnego. Bez konstrukcji kraty uniwersalnej, można udowodnić podobne twierdzenie względem pewnej podklasy ogółu $\mathbb{BW}$-krat. Przyjmijmy mianowicie definicję:

$$\mathcal{L} \in \mathbb{BW}_2 \;\Leftrightarrow\; \mathcal{L} \text{ jest } \mathbb{BW}\text{-kratą o sygnaturze } (\underbrace{2, \ldots, 2}_{k}), \text{ dla pewnego } k \geqslant 1.$$

Dodajmy, że Wolniewicz w [25] (por. II.1.4, III.1.2) przedstawia argumenty za tym, że klasa krat $\mathbb{BW}_2$ jest adekwatną formalizacją pewnych ważnych tez *Traktatu* Wittgensteina. Dlatego też kraty te nazwijmy *Wittgensteinowskimi* i odnotujmy twierdzenie.

Twierdzenie 5.2 $CL = \bigcap_{\mathcal{L} \in \mathbb{BW}_2} TR^{\bullet}(\mathcal{L})$.

Dowód. Niech $\alpha \notin CL$, przy czym $p_1, \ldots, p_k$ będą wszystkimi zmiennymi zdaniowymi występującymi w α. Ustalmy dowolną k-wymiarową kratę $\mathcal{L} \in \mathbb{BW}_2$ oraz wartościowanie $s: V \to At(L)$ takie, że dla każdej zmiennej p_i występującej w α, e-sytuacja $s(p_i)$ należy do i-tego wymiaru logicznego. Obcięcie $s|_{At(\alpha)}$ jest wtedy funkcją różnowartościową.

Dalej dowód przebiega tak samo jak w twierdzeniu 5.1; ustalmy mianowicie zero-jedynkowe wartościowanie $v: S \to \{0, 1\}$ takie, że $v(\alpha) = 0$ i połóżmy dla $i \in \omega$:

$$\overline{p_i} = \begin{cases} p_i & \text{jeśli } v(p_i) = 1 \\ \neg p_i & \text{jeśli } v(p_i) = 0 \end{cases}$$

oraz:

$$w = h^s(\overline{p_1}) \vee \ldots \vee h^s(\overline{p_k}).$$

($h^s(\overline{p_i})$ jest najmniejszą e-sytuacją w $\mathcal{L}$ weryfikującą zdanie $\overline{p_i}$. Fakt, że taka e-sytuacja istnieje dla zdania $\neg p_i$ wynika łatwo stąd, że wymiary logiczne są dwuelementowe.)

Dalej, analogicznie jak w twierdzeniu 5.1, indukcyjnie ze względu na budowę zdania φ pokazujemy równoważność:

$$w \Vdash_s \varphi \;\Leftrightarrow\; v(\varphi) = 1,$$

skąd dostajemy ostatecznie $w \nVdash_s \alpha$. ■

Podamy teraz jeszcze jedno twierdzenie o modelu uniwersalnym, z którego natychmiast wyniknie wniosek 5.1 oraz zwartość relacji $\Vdash_u$. Twierdzenie to w niepublikowanej pracy udowodnił p. mgr Piotr Kalemba.

Twierdzenie 5.3 *Dla dowolnego $x \in U$ zachodzi równość:*

$$Th(x) = Cn_2(x).$$

Dowód. Dla dowodu inkluzji $\supseteq$ pokażemy, że $Th(x)$ jest teorią. Niech mianowicie $\alpha \in Cn_2(Th(x))$; wtedy z finitarności operacji Cn_2 (por. wzór (1.19)) istnieje skończony podzbiór Γ zbioru $Th(x)$ taki, że $\alpha \in Cn_2(\Gamma)$. Wówczas $\bigwedge\Gamma \to \alpha \in CL$, zatem z wniosku 4.3 $x \Vdash_u \bigwedge\Gamma \to \alpha$. Z drugiej strony łatwo zauważyć, że $x \Vdash_u \bigwedge\Gamma$, a zatem z twierdzenia 4.3 również $x \Vdash_u \alpha$, tj. $\alpha \in Th(x)$.

Z lematu 5.1 mamy inkluzję $x \subseteq Th(x)$, a zatem:

$$Cn_2(x) \subseteq Cn_2(Th(x)) \subseteq Th(x).$$

Przypuśćmy niewprost, że implikacja $\subseteq$ nie zachodzi, czyli, że istnieje $\alpha \in Th(x)$ przy czym $\alpha \notin Cn_2(x)$. Z twierdzenia 1.5 o postaci normalnej, zdanie α jest równoważne na gruncie CL pewnej koniunkcji $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ przy czym każde zdanie α_i jest alternatywą literałów (można zakładać, że nie tautologiczną). Stąd mamy:

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \in Th(x) \setminus Cn_2(x),$$

zatem istnieje $1 \leqslant i \leqslant n$ takie, że:

$$\alpha_i \in Th(x) \setminus Cn_2(x). \tag{5.4}$$

Zauważmy najpierw, że z (5.4) wynika, że $x \neq 1_U$. Dalej, skoro α_i jest alternatywą literałów, przyjmijmy, że $\alpha_i = l_1 \vee \ldots \vee l_m$. Z (5.4) mamy wówczas:

$$x \cap \{l_1, \ldots, l_m\} = \emptyset. \tag{5.5}$$

Dla dowolnego literału l_i przez l_i' rozumieć będziemy literał sprzeczny z l_i (tj. $p_i' = \neg p_i$ oraz $\neg p_i' = p_i$); pokażemy, że $x' = x \cup \{l_1', \ldots, l_m'\}$ jest – jako zbiór zdań – sprzeczny. Istotnie, gdyby x' nie był sprzeczny, to byłby elementem kraty uniwersalnej $\mathcal{U}$, różnym od 1_U. Wówczas z lematu 5.1(iv), zbiór $Th(x')$ byłby również niesprzeczny. Oczywiście też $\alpha_i \in Th(x) \subseteq Th(x')$. Z drugiej strony, $\neg\alpha_i$ jest równoważne na gruncie CL koniunkcji $l_1' \wedge \ldots \wedge l_m'$, a skoro $l_1' \wedge \ldots \wedge l_m' \in Th(x')$ to $\neg\alpha_i \in Th(x')$; sprzeczność.

Pokazaliśmy, że x' jest sprzecznym zbiorem literałów, zatem z jego definicji, musi istnieć $1 \leqslant j \leqslant m$ takie, że $l_j \in x$, co przeczy (5.5). Uzyskana sprzeczność dowodzi ostatecznie tezy twierdzenia. ■

Kładąc $x = \emptyset$, z powyższego twierdzenia mamy natychmiast wniosek 5.1. Odnotujmy jeszcze jeden wniosek z udowodnionych w tej sekcji twierdzeń.

Wniosek 5.2 *Relacje* $\Vdash_{\mathcal{U},u}$, $\Vdash_u$ *są finitarne, tzn. dla dowolnych* $\Gamma \subseteq S$, $\beta \in S$ *oraz* $x \in U$ *zachodzi:*

i. $\Gamma \Vdash_{\mathcal{U},u} \beta \;\Rightarrow\; \exists_{\Delta \in Fin(\Gamma)}\, \Delta \Vdash_{\mathcal{U},u} \beta$,

ii. $x \Vdash_u \beta \;\Rightarrow\; \exists_{y \in Fin(x)}\, y \Vdash_u \beta$.

Dowód. Obydwa punkty wynikają z finitarności klasycznej operacji konsekwencji oraz twierdzeń 5.1 i 5.3, odpowiednio. ■

Oczywistą konsekwencją wniosku 5.2(ii) jest to, że dla dowolnego zdania $\alpha \in S$, w zbiorze weryfikatorów $V(\alpha)$ istnieją e-sytuacje minimalne, a zatem każdy obiektyw jest zbiorem niepustym. Z twierdzenia 4.7 wynika zatem, że ogół obiektywów nad kratą uniwersalną formuje albebrę Boole'a.

Skorowidz

Spis symboli

Bibliografia

[1] Z. Adamowicz, P. Zbierski, *Logika matematyczna*, PWN, Warszawa 1991.

[2] Arystoteles, *Metafizyka*, przeł. T. Żeleźniak, Redakcja Wydawnictw Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego, Lublin 1998.

[3] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Colloquium Publications Volume XXV, Providence, Rode Island 1967.

[4] I. Chajda, K. Głazek, *A Basic Course on General Algebra*, Technical University Press, Zielona Góra, 2000.

[5] M. Ch. Fitting, *Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-London 1969.

[6] G. Frege, *Sens i znaczenie*, w: Tenże, *Pisma semantyczne*, przeł. B. Wolniewicz, PWN, Warszawa 1977, s. 60-88.

[7] G. Grätzer, *General Lattice Theory*, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1978.

[8] J. Grygiel, *The Concept of Gluing for Lattices*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie, Częstochowa 2004.

[9] A. Grzegorczyk, *Zarys logiki matematycznej*, PWN, Warszawa 1969.

[10] J. Hawranek, J. Zygmunt, *O kratach warunkowo dystrybutywnych*, Logika 13, Acta Universitatis Wratislaviensis, No 1017, Wrocław 1988, s. 63-72.

[11] A. Meinong, *Supozycje*, przeł. J. Grudzińska, Wydawnictwo Adam Marszałek, Toruń 2004.

[12] M. Nasieniewski, A. Pietruszczak, *An Elementary Proof of Equivalence of Conditions in Defining of Conditionally Distributive Lattices*, Bulletin of the Section of Logic, Vol 26, No 4, s. 193-196.

[13] M. Omyła, *Non-Fregean Semantics for Sentences*, w: J. Woleński (red.), *Philosophical Logic in Poland*, Kluwer Academic Publishers, 1994, s. 153-165.

[14] M. Omyła, *O semantyce zdań*, w: [15], s. 57-66.

[15] M. Omyła (red.), *Skłonność metafizyczna*, Wydział Filozofii i Socjologii UW, Warszawa 1997.

[16] M. Omyła, *Zarys logiki niefregowskiej*, PWN, Warszawa 1986.

[17] A. Pietruszczak, *O zbiorze możliwych światów w kracie sytuacji elementarnych*, w: [15], s. 65-81.

[18] Platon, *Sofista*, przeł. W. Witwicki, PWN, Warszawa 1956.

[19] W. A. Pogorzelski, *Klasyczny rachunek zdań*, PWN, Warszawa 1975.

[20] W. A. Pogorzelski, *Notions and Theorems of Elementary Formal Logic*, Białystok 1994.

[21] R. Suszko, *Abolition of the Fregean Axiom*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 453 (1975), s. 169-239.

[22] R. Suszko, *Ontologia w traktacie L. Wittgensteina*, w: Tenże, *Wybór pism*, pod redakcją M. Omyły, Biblioteka Myśli Semiotycznej, Polskie Towarzystwo Semiotyczne, Warszawa 1998, s. 197-224.

[23] L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, przeł. B. Wolniewicz, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000.

[24] B. Wolniewicz, *Logic and Metaphysics*, Biblioteka Myśli Semiotycznej, Warszawa 1999.

[25] B. Wolniewicz, *Ontologia sytuacji. Podstawy i zastosowania*, PWN, Warszawa 1985.

[26] B. Wolniewicz, *O Traktacie*, w: [23], s. VII-XVII.

[27] B. Wolniewicz, *Rzeczy i fakty. Wstęp do pierwszej filozofii Wittgensteina*, PWN, Warszawa 1968.

[28] B. Wolniewicz, *Semantyka Fregego*, w: G. Frege, *Pisma semantyczne*, przeł. B. Wolniewicz, PWN, Warszawa 1977, s. VII-XXXII.