Logika intuicjonistyczna
Propozycja seminarium dla studentów filozofii

Dr Marcin Łazarz
Katedra Logiki i Metodologii Nauk
Uniwersytet Wrocławski

Przedmiotem zajęć jest jedna z najważniejszych logik nieklasycznych, mianowicie logika intuicjonistyczna. Powstała ona w latach trzydziestych XX wieku jako reakcja na poglądy filozoficzne holenderskiego matematyka Jana Brouwera. Osią tych poglądów — określanych jako *konstruktywizm* — jest przekonanie, że dowód istnienia obiektu matematycznego polega na jego konstrukcji. Mówiąc inaczej, odrzuca się tutaj dowody niekonstruktywne, wedle których obiekt x istnieje, o ile wykazano, że zdanie „obiekt x nie istnieje" prowadzi do absurdu.

Przykładem takiego rozumowania jest dowód następującego stwierdzenia:

Istnieją liczby niewymierne x, y takie, że liczba x^y jest wymierna.

Dowód. Liczba $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest albo wymierna albo niewymierna. Gdyby zachodził pierwszy przypadek, kładziemy $x = \sqrt{2}$ oraz $y = \sqrt{2}$. Gdyby zaś zachodził przypadek drugi, bierzemy $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ oraz $y = \sqrt{2}$, co kończy dowód. $\square$

Mimo, że argument powyższy jest akceptowany przez ogromną część matematyków, konstruktywiści twierdzą, że jest niepoprawny ponieważ nie rozstrzyga on czy liczba $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest wymierna czy niewymierna, a w konsekwencji liczby x oraz y nie są poprawnie skonstruowane.

Według Brouwera dowody stają się niekonstuktywne jeśli w istotny sposób oparte są na prawach logicznych takich jak:

$$(\neg p \to \bot) \to p, \quad p \vee \neg p, \quad \neg\neg p \to p$$

(tzw. prawo redukcji do absusdu, prawo wyłączonego środka, prawo podwójnej negacji), itp. Prawa takie są zatem w jakiś sposób „złe", dlatego też konstruktywizm nie może polegać na całej klasycznej logice. Arend Heyting, uczeń Brouwera, skonstruował rachunek logiczny — dziś zwany logiką intuicjonistyczną — który ma być odpowiednią logiczną bazą dla konstruktywizmu.

Na seminarium przedyskutujemy filozofię konstruktywizmu oraz zapoznamy się z intuicjonistyczną logiką, zarówno od strony składni jak i semantyki. Forma zajęć to wykład połączony z konwersatorium. Od studentów wymaga się aktywnego uczestnictwa, czytania zalecanej literatury, opracowania zadanego tematu i zreferowania go na forum.

Tematy poruszane na zajęciach:

1. Logika klasyczna a filozofia Jana Brouwera.
2. Dowody niekonstruktywne.

3. System logiki intuicjonistycznej INT.
4. Twierdzenie o dedukcji dla INT.
5. Semantyka możliwych światów Kripkego.
6. Pojęcie tautologii INT.
7. Twierdzenie o pełności dla INT.
8. Zanurzenie logiki klasycznej w INT: translacja Gödla.
9. Twierdzenie Gödla o nie istnieniu skończonej matrycy adekwatnej dla INT.
10. Logiki pośrednie, własność dysjunkcji, własność Halldena.

Literatura polecana:

[1] D. Bridges, E. Palmgren, *Constructive Mathematics* in: **Stanford Encyclopedia of Philosophy**, 2013:
`http://plato.stanford.edu/entries/mathematics-constructive/`

[2] R. Epstein, *The Semantic Foundations of Logic, Vol. 1: Propositional Logics*, Springer (Nijhoff International Philosophy Series 35), 1990.

[3] J. Moschovakis, *Intuitionistic Logic*, in: **Stanford Encyclopedia of Philosophy**, 2015:
`http://plato.stanford.edu/entries/logic-intuitionistic/`