Marcin Łazarz

O kratach sytuacji

Streszczenie. W pracy zajmujemy się Wolniewicza teorią sytuacji. Przywołano podstawowe fakty o kratach Wolniewicza oraz wskazano na możliwe uogólnienia. Porównano też semantykę Wolniewicza z semantyką Kripkego.

Słowa kluczowe: ontologia sytuacji, krata sytuacji

1. Inspiracje filozoficzne. Ontologia sytuacji jest konkurencyjną wobec ontologii przedmiotów teorią, która w centrum analizy stawia pojęcie sytuacji. O ile w ontologii przedmiotów za podstawowe składniki świata uważa się rzeczy, czyli z semantycznego punktu widzenia korelaty termów, w ontologii sytuacji bytami najprostszymi są sytuacje (stany rzeczy) czyli korelaty zdań. Świat, z punktu widzenia ontologii przedmiotów, jest to uniwersum rzeczy i rozmaitych relacji między rzeczami; z punktu widzenia ontologii sytuacji, światem jest największa niesprzeczna sytuacja.

Źródeł ontologii sytuacji można dopatrywać się u Platona, Wilhelma Ockhama, Alexiusa Meinonga i innych filozofów różnych epok (por. [8], paragraf 5.6), jednakże współczesne badania biorą początek z prac Gottloba Fregego [2] i Ludwiga Wittgensteina [7]. Dzieła te były inspiracją dla Romana Suszki oraz Bogusława Wolniewicza, którzy na przełomie lat 60-tych i 70-tych XX wieku stworzyli nowoczesną teorię sytuacji (por. [5], [6], [9], [10]. W niniejszej pracy podejmujemy kilka zagadnień wyrosłych na gruncie prac tego ostatniego autora.

Teoria sytuacji[1] w ujęciu Wolniewicza sformalizowana jest w języku teorii krat. Sytuacje są zatem częściowo uporządkowane przez relację, zwaną *obejmowaniem* (lub *zachodzeniem w*), a ponadto dla dowolnych dwóch sytuacji istnieje ich *suma* (tzw. *splot*) oraz *część wspólna* (tzw. *styk*). Z pragmatycznych powodów wygodnie jest przyjąć, że istnieje sytuacja *pusta*, czyli sytuacja, która zachodzi w każdej sytuacji, oraz sytuacja *sprzeczna*, tj. taka, w której wszystkie sytuacje zachodzą. Przyjmujemy ponadto, że każda sytuacja obejmuje jakąś *sytuację atomową* (czyli taką, która obejmuje tylko sytuację pustą i siebie samą) oraz zachodzi w pewnym *świecie możliwym* (czyli w takiej sytuacji, która jest obejmowana tylko przez sytuację niemożliwą oraz siebie samą). Przyjęte założenia wyraźmy krótko w poniższej definicji.

Definicja. *Kratą sytuacji* (krótko *S-kratą*) będziemy nazywać dowolną kratę L atomową i koatomową. Zbiór sytuacji atomowych oznaczmy przez $At(L)$, zaś zbiór koatomów (możliwych światów) przez $Kt(L)$. [2]

[1] Pisząc w niniejszej pracy „sytuacja” będziemy mieli na myśli to co Wolniewicz w [9] nazywa „sytuacją elementarną”.

[2] Zauważmy, że żądając by krata była atomowa, implicite zakładamy, że posiada zero. Tak samo, warunek koatomowości implikuje istnienie jedynki.

2. Kraty Wolniewicza. Wolniewicz w [9] przedstawia teorię krat sytuacji opartą na jedenastu dość skomplikowanych aksjomatach. Każdą S-kratę spełniającą warunki Wolniewicza nazwiemy tutaj *W-kratą*. Zamiast analizować poszczególne aksjomaty, skupimy się na ich charakteryzacji, która daje opis W-krat w prostym i intuicyjnym języku zbiorów.

Niech U będzie dowolnym zbiorem niepustym, zaś $\mathcal{P}$ jego partycją. Rozważmy następującą rodzinę zbiorów:

$$\mathrm{K}(\mathcal{P}) = \{X \subseteq U\text{: zbiór } X \cap Y \text{ jest co najwyżej jednoelementowy, dla } Y \in \mathcal{P}\} \cup \{U\}.$$

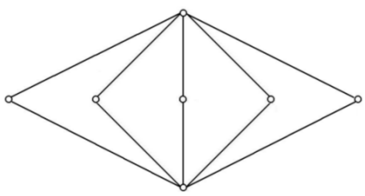
Twierdzenie [9]. *Niech $\mathcal{P}$ będzie partycją zbioru U. Wówczas:*

(i) *struktura* $\mathbf{K}(\mathcal{P}) = (\mathrm{K}(\mathcal{P}), \subseteq)$ *jest kratą,*

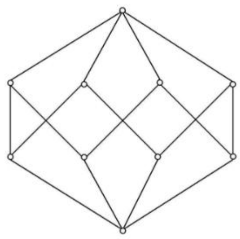
(ii) *jeśli $\mathcal{P}$ jest rodziną skończoną przy czym każdy jej element jest co najmniej dwuelementowym podzbiorem zbioru U, to* $\mathbf{K}(\mathcal{P})$ *jest W-kratą,*

(iii) *każda W-krata jest izomorficzna z pewną kratą* $\mathbf{K}(\mathcal{P})$. █

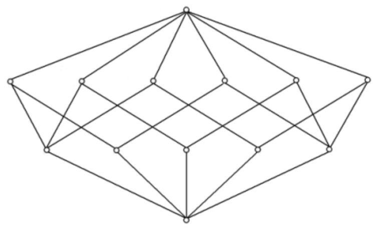
Przykład. Poniżej przedstawiono diagramy Hassego trzech „małych” W-krat.



$\mathbf{K}(\{\{1,2,3,4,5\}\})$



$\mathbf{K}(\{\{1,2\},\{3,4\}\})$



$\mathbf{K}(\{\{1,2\},\{3,4,5\}\})$

Przyjrzyjmy się bliżej kracie $\mathbf{K}(\{\{1,2\},\{3,4,5\}\})$. Zerem, czyli sytuacją pustą jest $\emptyset$, jedynką, czyli sytuacją sprzeczną – zbiór $\{1,2,3,4,5\}$. Pokrycie, które generuje naszą kratę składa się z dwóch elementów: $\{1,2\}$, $\{3,4,5\}$; nazwiemy je za Wolniewiczem *wymiarami logicznymi* tej kraty. Sytuacjami atomowymi są singletony $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$. Sytuacje atomowe $\{1\}$ i $\{3\}$ są *współmożliwe* ponieważ ich mnogościowa suma tj. zbiór $\{1,3\}$ zawiera elementy z różnych wymiarów. Z kolei np. atomy $\{3\}$ i $\{5\}$ *wykluczają się*, zatem ich splotem (supremum) jest całe uniwersum, tj. sytuacja sprzeczna. Kombinując wszystkie współmożliwe atomy dostajemy wszystkie sytuacje możliwe: $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$.

3. T-kraty. W [4] (rozdz. 3) wykazano, że 10 aksjomat Wolniewicza (por. [9], s.10) posiada nieintuicyjne konsekwencje. Sensownym zatem wydaje się rozważać kraty, które nie spełniają tego warunku, choć spełniają wszystkie pozostałe aksjomaty. Kraty takie nazwiemy tutaj *T-kratami*. Okazuje się, że również T-kraty posiadają łatwą i intuicyjną charakteryzację, tym razem w terminach pokryć zbioru. Ściślej, jeśli U jest niepustym zbiorem oraz $\mathcal{C}$ jest jego pokryciem (czyli rodziną podzbiorów zbioru U taką, że $\bigcup\mathcal{C} = U$), to tak samo jak w przypadku partycji możemy do $\mathcal{C}$ zastosować operację $\mathbf{K}$, oraz udowodnić analogiczne

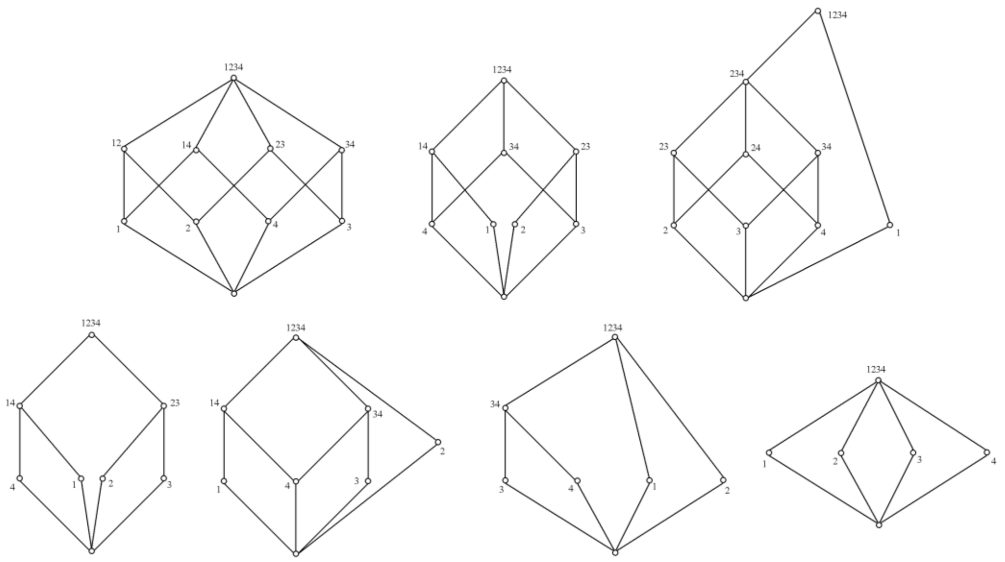
Twierdzenie [4]. *Niech $\mathcal{C}$ będzie pokryciem zbioru U. Wówczas:*

(i) *struktura* $\mathbf{K}(\mathcal{C}) = (\mathrm{K}(\mathcal{C}), \subseteq)$ *jest kratą,*

(ii) *jeśli $\mathcal{C}$ jest rodziną skończoną przy czym każdy jej element jest co najmniej dwuelementowym podzbiorem zbioru U, to $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ jest T-kratą,*

(iii) *każda T-krata jest izomorficzna z pewną kratą $\mathbf{K}(\mathcal{C})$.* $\blacksquare$

Przykłady. Poniższe rysunki przedstawiają wszystkie nieizomorficzne T-kraty nad czteroelementowym uniwersum. Kraty pierwsza i ostatnia (licząc od lewego górnego rogu) są W-kratami.



Zauważmy, że pojawia się tutaj pewnego rodzaju niejednoznaczność: przykładowo krata piąta (licząc od lewego górnego rogu) ma dwie reprezentacje: jako $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ gdzie $\mathcal{C} = \{\{1,2,3\},\{2,4\}\}$, oraz jako $\mathbf{K}(\mathcal{D})$ gdzie $\mathcal{D} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\}\}$, chociaż pokrycia $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ są nieizomorficzne w sensie poniższej definicji.

Definicja. Pokrycia $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ zbioru U są *izomorficzne* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje permutacja $p:U\to U$ taka, że dla dowolnego $A \subseteq U$ zachodzi:

$$A \in \mathcal{C} \quad \Leftrightarrow \quad p[A] \in \mathcal{D}. \blacksquare$$

Niech $\mathcal{C}$ będzie pokryciem zbioru U. Rozważmy następujące warunki:

(C1) $(\forall A, B \in \mathcal{C})(A \subseteq B \Rightarrow A = B)$, (C2) $(\forall X \subseteq U)[(\forall a, b \in X)(\exists C \in \mathcal{C})(a, b \in C) \Rightarrow (\exists D \in \mathcal{C})(X \subseteq D)]$

W [4] paragraf 3.1 udowodniono następujące

Twierdzenie. *Jeśli pokrycia $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ spełniają warunki* (C1) *i* (C2) *to kraty* $\mathbf{K}(\mathcal{C})$, $\mathbf{K}(\mathcal{D})$ *są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy pokrycia $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ są izomorficzne.* █

Pokrycia zbiorów pojawiają się w wielu matematycznych kontekstach, wspomnimy tutaj o dwóch. W algebrze uniwersalnej rozważa się tzw. *relacje tolerancji*, czyli zwrotne i symetryczne relacje binarne (por. [3]). Każda relacja tolerancji θ na zbiorze U wyznacza zbiór bloków U/θ (blokiem jest maksymalny podzbiór zbioru U, na którym relacja θ jest przechodnia), będący pokryciem zbioru U. Z drugiej strony każde pokrycie $\mathcal{C}$ zbioru U wyznacza relację tolerancji na U, daną wzorem:

$$(x,y) \in \Theta(\mathcal{C}) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists C \in \mathcal{C})(x, y \in C), \qquad \text{dla } x, y \in U.$$

Dla dowolnego pokrycia $\mathcal{C}$ zbioru U, skonstruujmy najpierw relację tolerancji $\Theta(\mathcal{C})$, a z kolei rozważmy jej zbiór bloków $U/\Theta(\mathcal{C})$. Powstaje pytanie: kiedy rodziny $\mathcal{C}$ i $U/\Theta(\mathcal{C})$ są identyczne? Odpowiedzi dostarcza następujące

Twierdzenie [4]. *Dla dowolnego pokrycia $\mathcal{C}$ zbioru U następujące warunki są równoważne:*

(i) $\mathcal{C} = U/\Theta(\mathcal{C})$,

(ii) *pokrycie $\mathcal{C}$ spełnia warunki* (C1) *i* (C2). █

W innym kontekście pokrycia pojawiają się w teorii grafów. Para $(U, \mathcal{C})$, gdzie U jest dowolnym zbiorem niepustym, zaś $\mathcal{C}$ jego pokryciem, nazywa się tam *hipergrafem* (por. [1], rozdz. 17). Powyższe twierdzenie – po przetłumaczeniu na język grafów – umożliwia kodowanie hipergrafów za pomocą grafów prostych bez straty jakiejkolwiek informacji. Istotnie, ustalmy hipergaf $(U, \mathcal{C})$, przy czym załóżmy, że $\mathcal{C}$ spełnia warunki (C1) i (C2). Rozważmy graf prosty (U, E) taki, że $\{a,b\} \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $C \in \mathcal{C}$ takie, że $\{a,b\} \subseteq C$. Hiperkrawędzie (elementy $\mathcal{C}$) zostały tu „zakodowane" jako krawędzie (elementy E). Chcąc „odkodować" hiperkrawędzie, wystarczy rozważyć wszystkie maksymalne kilki grafu (U, E) i twierdzenie gwarantuje, że dostaniemy z powrotem $\mathcal{C}$. [3]

3. Kraty sytuacji z punktu widzenia logiki. Opiszemy teraz podstawowe założenia semantyki Wolniewicza przedstawionej w [9] rozdz. II.3. Rozważmy język koniunkcyjno-negacyjny język zdaniowy, czyli algebrę $(Fm, \wedge, \neg)$ nad zbiorem wolnych generatorów At

[3] Przykładowo zbiór hiperkrawędzi hipergrafu $(\{a,b,c,d,e,f,\},\{\{a,b,d\},\{a,c,e\},\{b,c,f\}\})$ nie spełnia warunku (C2). Po zakodowaniu i powtórnym odkodowaniu dostajemy inny hipergraf $(\{a,b,c,d,e,f,\},\{\{a,b,d\},\{a,c,e\}, \{b,c,f\},\{a,b,c\}\})$.

(zmiennych). *Wartościowaniem* (*w sensie Wolniewicza*) w W-kratę L jest każda funkcja $v{:}At \rightarrow V(L)$, gdzie $V(L)$ jest to rodzina podzbiorów zbioru L zwanych *weryfikatorami*. Weryfikatory są to zbiory domknięte „w górę" oraz posiadające dodatkowo pewną własność[4]. Wartościowanie v rozszerza do relacji forsowania $\Vdash_v \subseteq L \times Fm$ w następujący sposób: dla dowolnego $x \in L$, dla dowolnych formuł $p \in At$, $\alpha, \beta \in Fm$ przyjmujemy:

(a) $x \Vdash_v p \quad \Leftrightarrow \quad x \in v(p)$,

(b) $x \Vdash_v \alpha \wedge \beta \quad \Leftrightarrow \quad x \Vdash_v \alpha$ oraz $x \Vdash_v \beta$,

(c) $x \Vdash_v \neg\alpha \quad \Leftrightarrow \quad (\forall y \in L)(y \Vdash_v \alpha \Rightarrow y = 1)$.

Tautologią W-kraty L nazwiemy taką formułę α, która jest forsowana w każdej sytuacji $x \in L$, przy każdym wartościowaniu v. Zbiór tautologii kraty (*zawartość*) oznaczmy przez $\mathrm{E}(L)$. Dla zbioru formuł X oraz formuły α można również wprowadzić w standardowy sposób relację konsekwencji:

$X \Vdash \alpha \quad \Leftrightarrow \quad$ dla dowolnej W-kraty L, dowolnego wartościowania $v{:}At \rightarrow V(L)$

oraz dowolnego $x \in L$, jeśli $(\forall \beta \in X)(x \Vdash_v \beta)$ to $x \Vdash_v \alpha$.

Abstrahując od wspomnianej własności weryfikatorów semantyka Wolniewicza nie jest niczym nowym w stosunku do semantyki Kripkego. Zważając zatem na klasyczny wynik Godla, który głosi, że zbiór koniunkcyjno-negacyjnych tautologii logiki intuicjonistycznej jest identyczny ze zbiorem koniunkcyjno-negacyjnych tautologii logiki klasycznej oraz na twierdzenie o pełności logiki intuicjonistycznej względem klasy skończonych struktur Kripkego dostajemy słabe twierdzenie o pełności klasycznego rachunku zdań względem klasy W-krat. Ze względu na twierdzenie o dedukcji dla logiki intuicjonistycznej łatwo uzyskać też silne twierdzenie o pełności. Zagadnienia te szczegółowo wyjaśnione zostały w [4] rozdz. 5.

Kwestią otwartą pozostaje jak uogólnić semantykę Wolniewicza na słabsze kraty, np. T-kraty i w ogólności na S-kraty.

Literatura:

[1] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam – London, 1973.

[2] G. Frege, *Pisma semantyczne*, przeł. B. Wolniewicz, PWN, Warszawa 1977.

[3] J. Grygiel, *The Concept of Gluing for Lattices*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie, Częstochowa 2004.

[4] M. Łazarz, *Kraty sytuacji elementarnych*, Kraków 2007, dostępna na stronie: www.klmn.uni.wroc.pl.

[4] Por. [9], warunek (2.30). Można nieco uprościć ten warunek do postaci: dla dowolnego wymiaru logicznego D W-kraty L oraz dla każdego $a \in L$ jeśli $\{a\}{\cdot}D \subseteq V$, to $a \in V$.

[5] R. Suszko, Ontologia w traktacie Wittgensteina, w: R. Suszko, *Wybór pism*, red. M. Omyła, Biblioteka Myśli Semiotycznej, Warszawa 1998, s. 197-224.

[6] R. Suszko, *Abolition of the Fregean Axiom*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 453 (1975), s. 169-239.

[7] L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, przeł. B. Wolniewicz, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000.

[8] B. Wolniewicz, *Logic and Metaphysics*, Biblioteka Myśli Semiotycznej, Warszawa 1999.

[9] B. Wolniewicz, *Ontologia sytuacji. Podstawy i zastosowania*, PWN, Warszawa 1985.

[10] B. Wolniewicz, *Rzeczy i fakty. Wstęp do pierwszej filozofii Wittgensteina*, PWN, Warszawa 1968.

On the lattices of situations

Summary. In the paper we deal with the Wolniewicz's theory of situations. We recall the basic facts concerning the Wolniewicz's lattices and sketch the possible generalizations. Finally we compare the semantics of Wolniewicz with the semantics of Kripke.